SERIE PLATA

De Simone • Turner

Matemática

Guías teórico-prácticas

A-Z editora

Matemática 5

SERIE PLATA

Irene Marchetti de De Simone/ Margarita García de Turner

Matemática 5

Guías teórico-prácticas

A-Z editora

Hecho el depósito de ley 11.723. Derechos reservados.
Libro de edición argentina Impreso en la Argentina
© A - Z editora S. A.
Paraguay 2351 (1121) Buenos Aires. Argentina
Teléfonos: 961-4036/37/38/0088

I.S.B.N. 950-534-161-X

ÍNDICE

GUIA DE ESTUDIO I

1.1 ÁNGULOS ORIENTADOS.
Ángulos centrados 4
1.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS.
Sistema sexagesimal 5
Sistema centesimal 6
Sistema radial 8
Sistema horario 12
Uso de la calculadora 13
Para ejercitar 13
Para recordar 18

GUÍA DE ESTUDIO II

2.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.
Para ejercitar 24
2.2 RELACIONES ENTRE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS.
Ángulos complementarios 31
Ángulos que difieren en 90° 32
Ángulos suplementarios 34
Ángulos que difieren en 180° 34
Ángulos opuestos 36
Reducción de ángulos al primer cuadrante 37
Ángulos cuyo seno es cero 41
Ángulos cuyo coseno es cero 42
Para ejercitar 43
Para recordar 52

GUÍA DE ESTUDIO III

3.1 FUNCIÓN SENO.
..... 55
3.2 FUNCIÓN COSENO.
Para ejercitar 71
3.3 FUNCIONES: TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE Y COSECANTE.
Función tangente 76
Función cotangente 77
Funciones: secante y cosecante 79
Para ejercitar 80
3.4 FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS.
Arco coseno 85
Arco tangente 85
Para ejercitar 87
Para recordar 89

GUÍA DE ESTUDIOS IV

4.1 VECTOTRES. REVISION.
Producto escalar. Definición. 93
Expresión del producto escalar mediante las componentes de los vectores 94
4.2 FORMULAS DE ADICIÓN.
Cálculo de coseno (α–β) 97
Para ejercitar 99
4.3 NÚMEROS COMPLEJOS.
Forma trigonométrica de un número complejo 108
Operaciones con números complejos en forma trigonométrica. 111
Multiplicación. 111
División 112
Raíces de los números complejos 113
Para ejercitar 115
Para recordar 117

GUÍA DE ESTUDIO V

5.1 MANEJO DE TABLAS Y CALCULADORA.
Tabla modelo A 121
Tabla modelo B 122
Solución con calculadora 124
Para ejercitar 125
5.2 TEOREMA DEL SENO. TEOREMA DEL COSENO.
Teorema del seno 132
Teorema del coseno 133
Fórmula del área de un triángulo en función de sus lados 135
Para ejercitar 135
Para recordar 141

GUÍA DE ESTUDIO VI

6.1 INTERVALOS.
..... 145
Intervalos infinitos 146
Entorno de un punto a, de radio ∂ 147
Entorno reducido de un punto a, de radio ∂ 147
Para ejercitar 147
6.2 NOCION DE LÍMITE.
..... 151
Propiedades de los límites 159
Límites infinitos 162
Límites para $x \to \alpha$ 165
Límites indeterminados 167
Límite de $\frac{\text{sen } x}{x}$ para $x \to 0$ 169
Para ejercitar 172
6.3 CONTINUIDAD.
..... 175
Continuidad en un intervalo abierto 177
Asíntotas 178

Asíntotas verticales 178
Asíntotas horizontales 178
Asíntotas oblicuas 178
Para ejercitar 180
Para recordar 185

GUÍA DE ESTUDIO VII

7.1 DERIVADA.
Recta tangente a una curva C en un punto P 189
Derivada de una función de un punto 190
Cálculo de derivadas 193
Tabla de derivadas 196
Reglas de derivación 196
Derivada del producto de una constante por una función 196
Derivada de la suma de dos funciones 197
Derivada de la diferencia de funciones 197
Derivada del producto de funciones 198
Derivada de un cociente de funciones 198
Derivada de una función compuesta 199
Derivadas sucesivas 201
Interpretación física de la derivada 202
Para ejercitar 203
7.2 VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES.
Función estrictamente creciente en un punto x_o de su dominio 207
Función estrictamente decreciente en un punto x_o de su dominio 208
Función estrictamente creciente en un intervalo 209
Función estrictamente decreciente en un intervalo 209
Máximos y mínimos 213
Máximo relativo 213
Mínimo relativo 214
Máximo absoluto 217
Mínimo absoluto 217
Concavidad. Puntos de inflexión 221
7.3 PROBLEMAS.
..... 223
Para ejercitar 224
Para recordar 229

GUÍA DE ESTUDIO VIII

8.1 CONCEPTO DE INTEGRAL.
..... 233
Área de una región limitada por una curva 234
Propiedades de la integral definida 236
Integral indefinida 237
Tabla de primitivas 239
8.2 CÁLCULO DE INTEGRALES.
Reglas de integración 240
Integración de una suma de funciones 240
Integración del producto de una constante por una función 240

Integración por sustitución 241
Integración por partes 243
Cálculo de la integral definida
Regla de Barrow 244
8.3 CALCULO DE ÁREAS.
..... 246
Área encerrada entre dos curvas 248
Para ejercitar 253
Para recordar 262

PARA PRACTICAR 263
PARA EVALUAR 281
RESPUESTAS 303

GUÍA DE ESTUDIO I

1.1 Ángulos Orientados

Para aplicar (A)

1.2 Sistemas de medición de ángulos

Para aplicar (B, C, D y E)
Para ejercitar (ejercicios n° 1 al 17)

Para recordar

1.1 ÁNGULOS ORIENTADOS

Consideremos en el plano un punto O y dos semirrectas con origen en dicho punto.

Llamamos ángulo orientado $\widehat{ROS}$, al ángulo generado por la rotación, en sentido contrario a las agujas del reloj, de la semirrecta $\overrightarrow{OR}$ hacia la posición de la semirrecta $\overrightarrow{OS}$ (fig. 1).

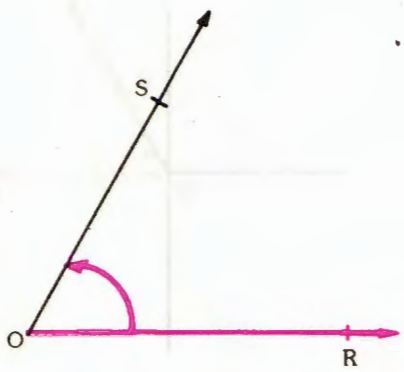


Fig. 1

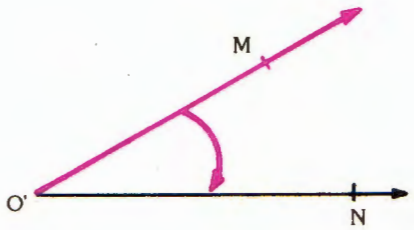


Fig. 2.

Como por convención se considera positivo al sentido contrario al giro de las agujas del reloj, decimos que:

$\widehat{ROS}$ es un ángulo centrado de sentido positivo. $\overrightarrow{OR}$ es la semirrecta inicial de $\widehat{ROS}$.

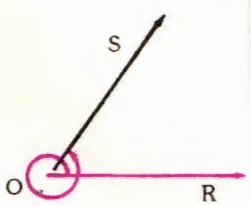
Análogamente, dadas las semirrectas $\overrightarrow{O'M}$ y $\overrightarrow{O'N}$ llamamos ángulo orientado — $\widehat{MO'N}$, al ángulo generado por la rotación en sentido horario de la semirrecta $\overrightarrow{O'M}$ hacia la semirrecta $\overrightarrow{O'N}$ (fig. 2). Decimos que:

— $\widehat{MON}$ es un ángulo orientado de sentido negativo, e indicamos este sentido con el signo—

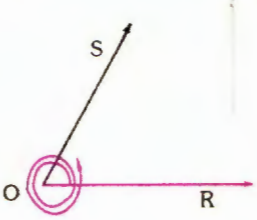
$\overrightarrow{O'M}$ es la semirrecta inicial del ángulo — $\widehat{MON}$.

En la figura 1 $\overrightarrow{OR}$ puede alcanzar también la posición de la semirrecta $\overrightarrow{OS}$ después de haber completado uno o más giros en sentido positivo (fig. 3).

Del mismo modo $\overrightarrow{O'M}$ (fig. 2) puede alcanzar la posición de la semirrecta $\overrightarrow{O'N}$, después de uno o más giros en sentido negativo (fig. 4).

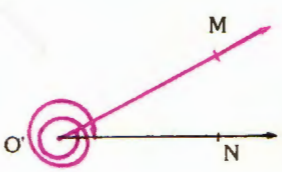


$\widehat{ROS}$ + 1 giro



$\widehat{ROS}$ + 2 giros

fig. 3

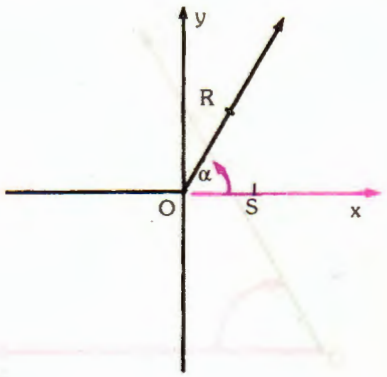


$-\widehat{MO'N}$ - 2 giros

fig. 4

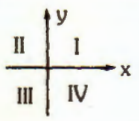
Ángulos centrados

Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales de centro en O, convenimos en llamar ángulo centrado a todo ángulo orientado con vértice en O, cuya semirrecta inicial coincida con el semieje positivo de las abscisas.



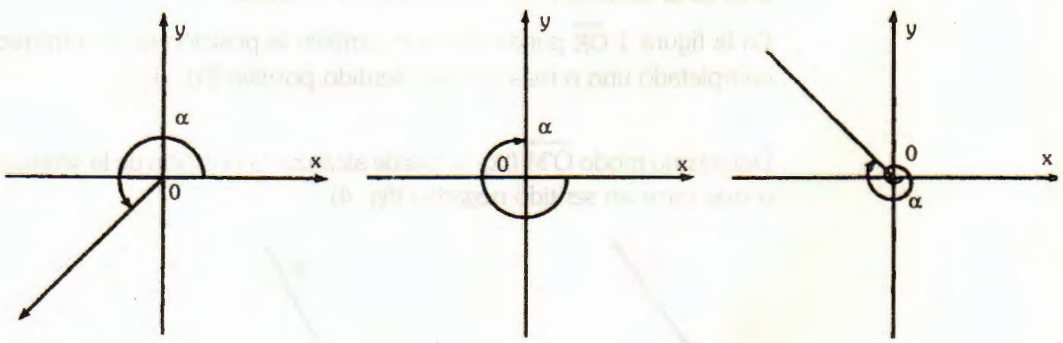
$S\widehat{O}R$ (que también puede llamarse $\widehat{\alpha}$) es un ángulo centrado de sentido positivo. La semirrecta inicial coincide con el semieje positivo de las abscisas.

Observación: Los ejes X, Y, dividen al plano en cuatro regiones: primer cuadrante (I), segundo cuadrante (II), tercer cuadrante (III) y cuarto cuadrante (IV).



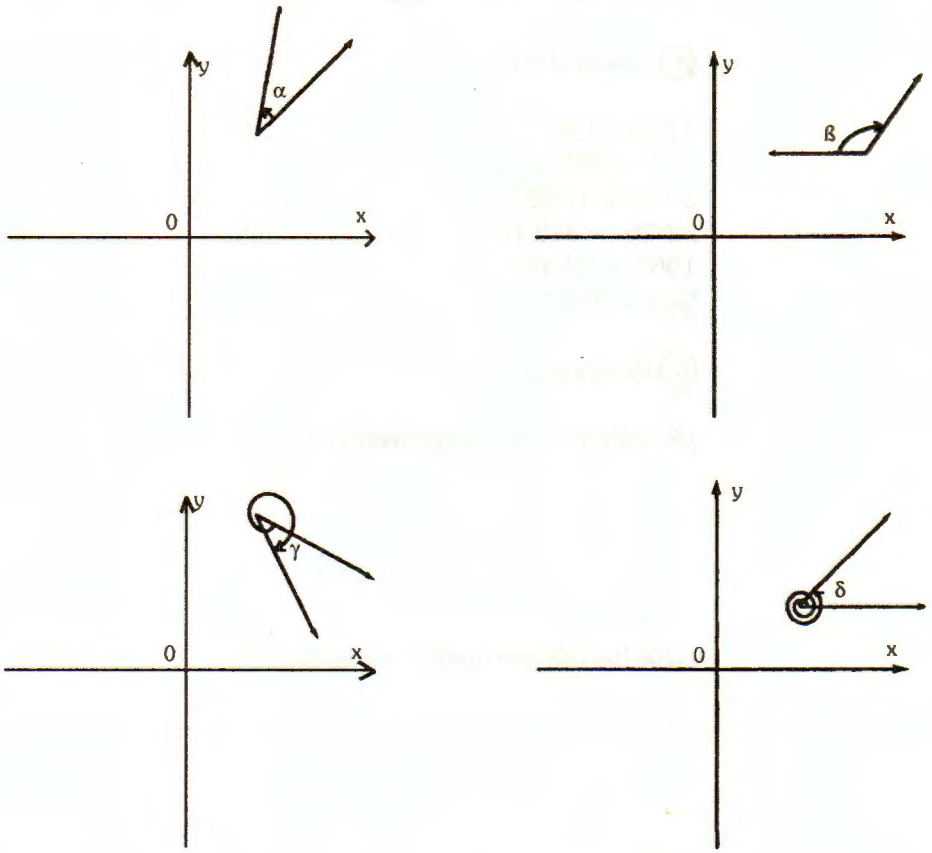
Para aplicar (A)

(a) Indicar el signo de $\widehat{\alpha}$ en cada uno de los siguientes casos:



(b) Representar en cada uno de los siguientes casos el ángulo centrado correspondiente, teniendo en cuenta que:

Para cada ángulo del plano existe un ángulo centrado congruente a él.



1.2 SISTEMAS DE MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Sistema sexagesimal

Su unidad de medida es el grado sexagesimal (1°) y se obtiene dividiendo el ángulo recto en 90 partes congruentes.

$$1° = \frac{1\,R}{90} \Rightarrow 1\,R = 90°$$

Submúltiplos:

minuto sexagesimal (1')

$$1' = \frac{1°}{60} \Rightarrow 1° = 60'$$

segundo sexagesimal (1")

$$1'' = \frac{1'}{60} \Rightarrow 1' = 60''$$

Para aplicar (B)

(a) Indicar V o F:

12°6' = 756' .....
5,2° = 302' .....
20'52"= 1252" .....
52°36" = 3120,6' .....
1965' = 32,45° .....
546"= 10,75' .....

(b) Responder.

¿A cuántos minutos equivalen 10°?

.....

.....

¿Qué fracción del grado representa 1"?

.....

.....

¿Cuál es la amplitud de un ángulo recto si se toma como unidad de medida el minuto?

.....

.....

Si ampl. de α = 15°20', ¿cuál es la amplitud de α expresada en segundos?

.....

.....

Sistema centesimal

Su unidad de medida es el grado centesimal (1^G) y se obtiene dividiendo al ángulo recto en 100 partes congruentes.

$$1^G = \frac{1\,R}{60} \Rightarrow 1\,R = 100^G$$

submúltiplos:

minuto centesimal (1^M)

$$1^M = \frac{1^G}{100} \Rightarrow 1^G = 100^M$$

segundo centesimal (1^S)

$$1^S = \frac{1^M}{100} \Rightarrow 1^M = 100^M$$

Para aplicar (C)

(a) Completar:

527^{G} = ... ^{M}

$78^{G}\ 09^{M}$ = ... ^{S}

2004^{M} = ... ^{G}

9^{G} = ... ^{S}

(b) Responder:

¿Cuál es la amplitud de un ángulo llano expresada en minutos centesimales?

.....

.....

.....

¿Cuál es la amplitud expresada en segundos centesimales, de un ángulo de un giro?

.....

.....

.....

¿ Cuántos grados centesimales corresponden al ángulo de sentido positivo menor que un giro, formado por la semirrecta inicial y la bisectriz del primer cuadrante?

.....

.....

.....

Si $\hat{\alpha} = -5478^{M}$, ¿a qué cuadrante pertenece?
¿Cuántos grados centesimales mide?

.....

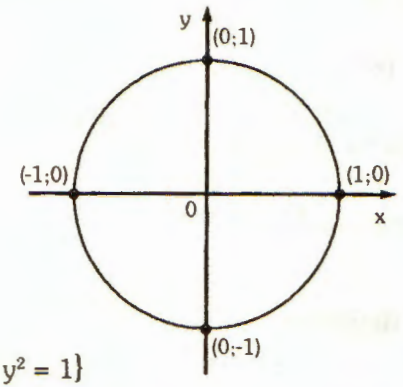
.....

.....

Aclaración: en lo que sigue escribiremos α, sin el símbolo de ángulo, sobreentendiendo que nos referimos a la amplitud de α.
Así, $\alpha = 45°$ significará ampl. de $\alpha = 45°$

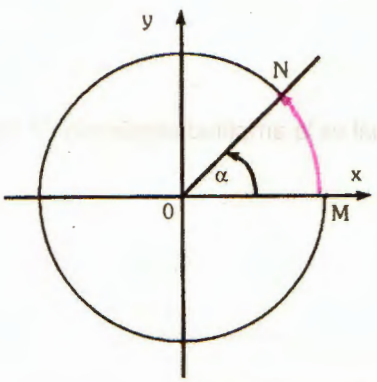
Sistema radial

Consideremos en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares y una circunferencia C con centro en el origen del sistema y radio igual a 1.



$C = \{(x;y) \in R \times R / x^2 + y^2 = 1\}$

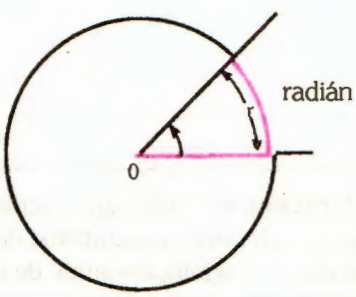
Si centramos un ángulo orientado α observamos que éste determina sobre C un arco de circunferencia $\overset{\frown}{MN}$ (arco orientado que tiene el mismo sentido que α).



Como para cada arco orientado existe un número real que es su longitud, podemos entonces asignar a cada ángulo centrado la longitud de su arco, siempre con el signo que corresponda, siendo la longitud de ese arco la medida en radianes del ángulo.

De esta manera si α es un ángulo positivo de un giro ($\alpha = 360°$) le asignamos el número 2π, o sea, la longitud de la circunferencia de radio 1. Decimos entonces que α tiene como medida 2π radianes.

> Se llama radián al ángulo que abarca un arco de circunferencia cuya longitud es igual al radio de la misma.



Observación: en adelante, cada vez que indiquemos la amplitud de un ángulo con un número real, significará aquel cuya medida en radianes es ese número. En cambio, la amplitud de ese mismo ángulo en cualquier otro sistema de medición será indicado por un número real acompañado de la unidad de medida correspondiente.

	SEXAGESIMAL	CIRCULAR
α	360°	2π

Para aplicar (D)

(a) Completar:

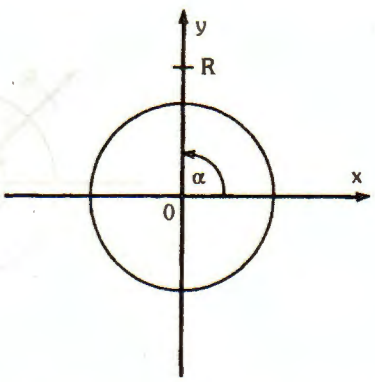
1 radián= .....° .....' ....."

(b) Completar:

b_1) Sea $\widehat{\alpha}$ un ángulo positivo menor que un giro.

Si $\overrightarrow{OR}$ coincide con el semieje positivo Y, entonces la longitud del arco correspondiente a $\widehat{\alpha}$ es .....

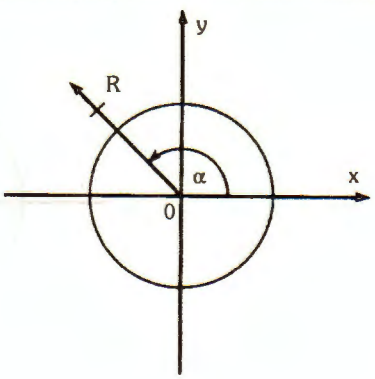
Luego a α se le asigna el número .....



Si $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz del segundo cuadrante, entonces .....

.....

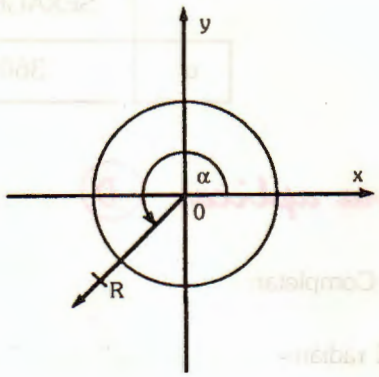
Luego, ...



Si $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz del tercer cuadrante, entonces .....

.....

Luego, ...

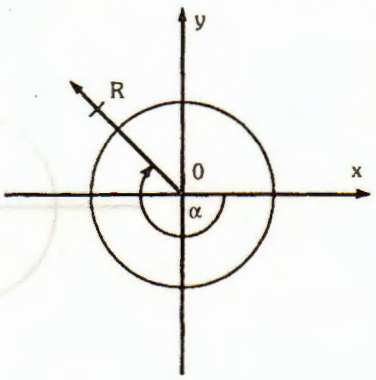


b_2) Sea $\hat{\alpha}$ un ángulo negativo menor que un giro

Si $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz del segundo cuadrante, entonces .....

.....

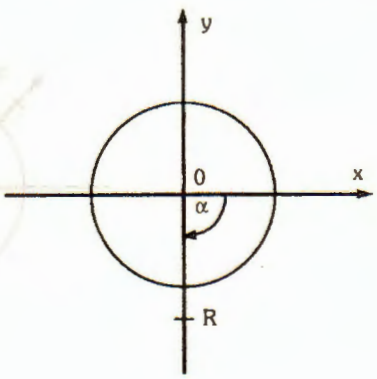
Luego, ...



Si $\overrightarrow{OR}$ coincide con el semieje negativo Y, entonces .....

.....

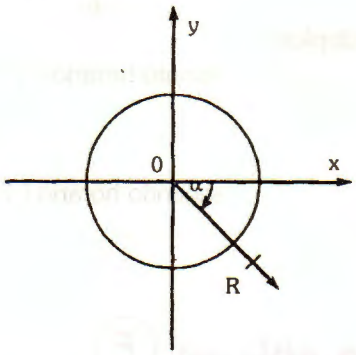
Luego, ...



Si $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz del cuarto cuadrante, entonces .....

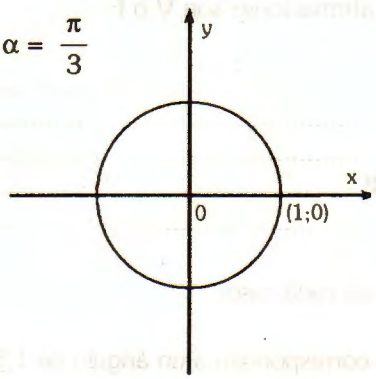
.....

Luego, ...

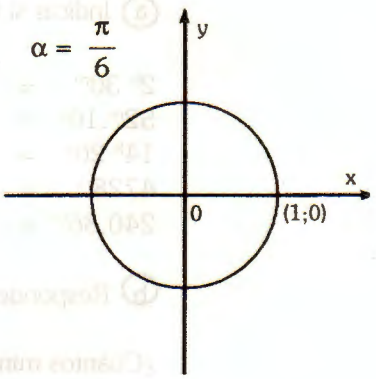


ⓒ Determinar en cada caso el ángulo centrado $\widehat{\alpha}$:

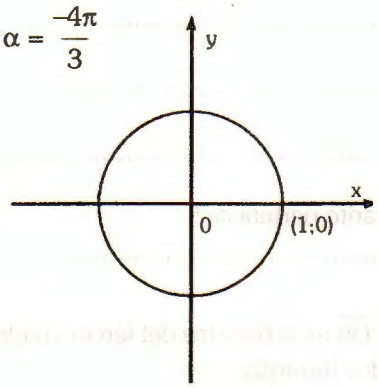
$\alpha = \frac{\pi}{3}$



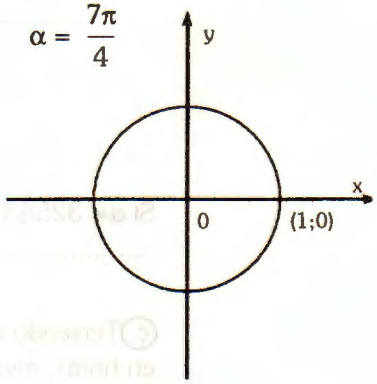
$\alpha = \frac{\pi}{6}$



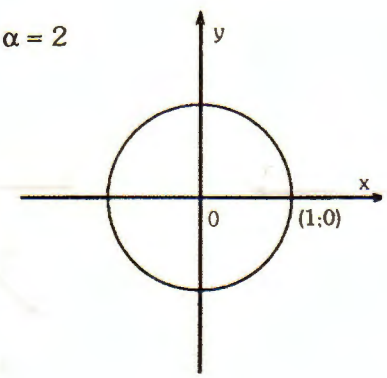
$\alpha = \frac{-4\pi}{3}$



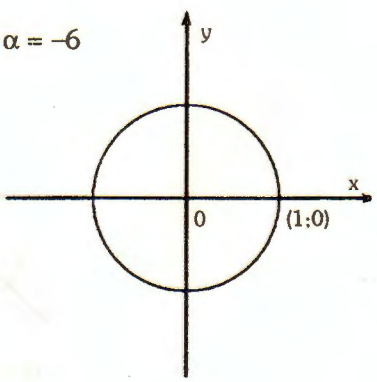
$\alpha = \frac{7\pi}{4}$



$\alpha = 2$



$\alpha = -6$



Sistema horario

Su unidad de medida es el ángulo de una hora (1^h), que equivale a la sexta parte del ángulo recto.

$$1^h = \frac{1\,R}{6} \Rightarrow 1\,R = 6^h$$

submúltiplos:

minuto horario (1^m)

$$1^m = \frac{1^h}{60} \Rightarrow 1^h = 60^m$$

segundo horario (1^s)

$$1^s = \frac{1^m}{60} \Rightarrow 1^m = 60^s$$

Para aplicar (E)

(a) Indicar si las siguientes afirmaciones son V o F

$2^h\ 30^m$	=	$2,30^h$	.....
$52^m\ 10^s$	=	3120^s	.....
$14^h\ 20^s$	=	$840,3\widehat{3}^m$	.....
4728^s	=	$1^h\ 19^m\ 48^s$	.....
$240,36^m$	=	$4^h\ 36^m$	.....

(b) Responder justificando en cada caso:

¿Cuántos minutos horarios corresponden a un ángulo de 1,5 giros?

.....

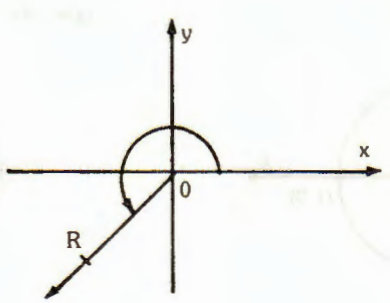
.....

.....

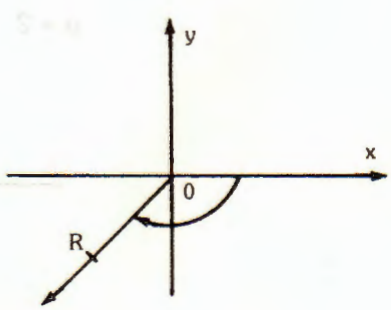
Si $\alpha = 32583^s$ ¿a qué cuadrante pertenece?

.....

(c) Teniendo en cuenta que $\overrightarrow{OR}$ es la bisectriz del tercer cuadrante, expresar en cada caso a α en horas, minutos y segundos horarios.



α = ...^{h} .....^{m} .....^{s}



α = ...^{h} .....^{m} .....^{s}

Uso de la calculadora

Ⓘ Dado un ángulo en sistema sexagesimal, obtener su expresión decimal en grados sexagesimales.

Ejemplo: hallar la expresión en grados sexagesimales de α, siendo $\alpha = 27° 12' 36''$

Si no disponemos de una calculadora científica procedemos de la siguiente manera:

Si $\alpha = 27° 12' 36''$

entonces $\alpha = 27° + \left(\frac{12}{60}\right)^{\circ} + \left(\frac{36}{3600}\right)^{\circ} = 27° + 0{,}2° + 0{,}01° = 27{,}21°$

resulta $\alpha = 27{,}21°$, que es la expresión decimal de α en grados sexagesimales.

Las calculadoras científicas hacen esta conversión en forma inmediata. En las que tienen la tecla [°'"] debe seguirse la secuencia; 27 [°'"] 12 [°'"] 36 [°'"] [=] para obtener, 27 ,21° . Otras calculadoras tienen la tecla [DMS] (iniciales de las palabras inglesas degree, minutes, seconds) que combinada con la tecla [INV] permite obtener el valor 27,21° pulsando sucesivamente: 27 [.] 1236 [INV] [DMS] [=].

Ⓘ Dada la expresión decimal en grados sexagesimales de un ángulo obtener la expresión en grados, minutos y segundos sexagesimales.

Ejemplo: hallar la expresión sexagesimal de $\alpha = 49, 2618°$.

Si $\alpha = 49{,}2618°$

entonces $\alpha = 49° + 0{,}2618°$

$= 49° + 15{,}708'$

$= 49° 15' + 0{,}708'$

resulta $\alpha = 49° 15' 42''$

Recordar :

$1° \_\_\_\_\_ 60'$

$0{,}2618° \_\_\_\_\_ x$

$x = \frac{0{,}2618° \cdot 60'}{1°}$

$1' \_\_\_\_\_ 60''$

$0{,}708' \_\_\_\_\_ y$

$y = \frac{0{,}708' \cdot 60''}{1'}$

Para obtener el mismo resultado con calculadora científica debe pulsarse la secuencia: 49 [.] 2618 [INV] [°'"] [=]

o bien: 49 [.] 2618 [INV] [DMS] para obtener 49.1542.

PARA EJERCITAR

1. Completar:

	sexagesimal	centesimal	circular	horario
α_1	36°			
α_2		120^G		
α_3			$\frac{3\pi}{4}$	
α_4				15^h
α_5			$\frac{7\pi}{8}$	
α_6	810°			

2. Dadas las siguientes series, de tres ángulos ordenarlos de menor a mayor.

a) $\alpha = 123^G\ 18^M\ 20^s$

$\beta = \frac{5}{8}\pi$

$\gamma = 148°\ 27'\ 32''$

..... < ..... < .....

b) $\alpha = 6^h\ 24^m$

$ß = 106^G$

$\gamma = 95°\ 50'$

..... < ..... < .....

3. Calcular el valor de x:

a) $x = 3{,}5 + 18°\ 25'$ (Sistema radial)

.....

.....

.....

b) $x = \frac{\pi}{3} + 90^G - 3.\ 25°\ 18'\ 32''$ (Sistema sexagesimal)

.....

.....

.....

c) $\frac{2x + 5°\ 18'}{2} = 25^G\ 10^M + 3^h$ (Sistema centesimal)

.....

.....

.....

d) $ax = 5°\ 24'\ x + 2a - 12^G$

.....

.....

.....

e) $100^G x - 90°a^2 + 200^G ab - \frac{\pi}{2} b^2 = 0$

.....

.....

.....

4. Expresar en sistema centesimal el valor de un ángulo exterior de un triángulo equilátero.

.....

.....

5. Expresar en sistema radial las tres cuartas partes de la suma de los ángulos interiores de un romboide.

.....

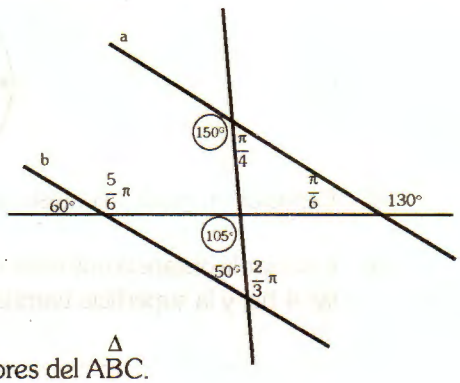
.....

6. ¿ Cuál es la medida en minutos sexagesimales de un ángulo exterior de un pentágono regular?

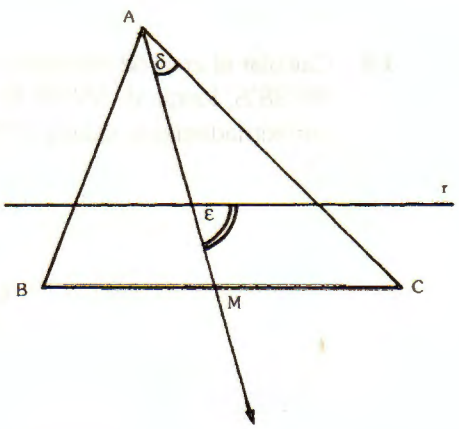
.....

.....

7. Teniendo en cuenta que los valores redondeados son correctos y que a //b descubrir los tres errores que aparecen en la siguiente figura:



8. Calcular los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{ABC}$.
Datos: r // BC
$\overrightarrow{AM}$ bisectriz de $\widehat{A}$
$\delta = \frac{\pi}{6}$
$\varepsilon = 80^{G}$



.....

.....

9. Si la suma de dos ángulos es 139° 20' y su diferencia es 50^G ¿cuál es la medida de cada uno de ellos?

.....

.....

10. Expresar en metros la longitud del arco de circunferencia de radio igual a 1600 m, determinado por un ángulo central cuya medida es $\frac{3\pi}{4}$.

.....

.....

11. ¿ Cuántos arcos de alambre de 8 dm de longitud deben unirse para cercar las $\frac{5}{8}$ partes de una rotonda circular de 2400 m de diámetro?

.....

.....

12. Teniendo en cuenta la hora indicada en la figura y suponiendo que el minutero del reloj mide 9 cm:

a) Expresar en grados centesimales el ángulo cóncavo determinado por las dos agujas.

b) Calcular la distancia que debe recorrer el extremo del minutero para que el reloj indique las 4 hs, y la superficie barrida en el trayecto.

.....

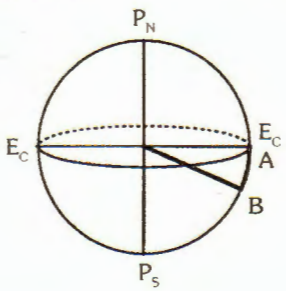
.....

13. ¿Cuántas horas, minutos y segundos tarda la Tierra en girar 20°30' sobre su eje?

.....

.....

14. Calcular el arco de meridiano terrestre $\overset{\curvearrowright}{AB}$, siendo B la ciudad de Buenos Aires (latitud 34°38'S, longitud: 58°28' O de G) y suponiendo que la Tierra es una esfera de radio aproximadamente igual a 6370 km.



.....

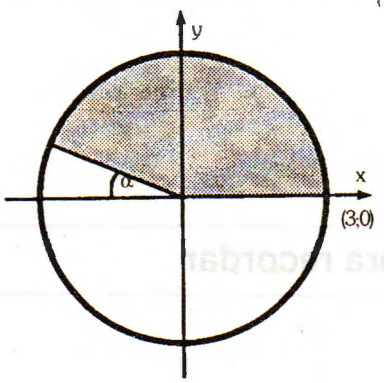
.....

15 . Calcular la longitud del arco de meridiano terrestre comprendido entre el ecuador y la ciudad de Ushuaia (lat.: 54°48' S, long.: 68°19' O de G).

.....

.....

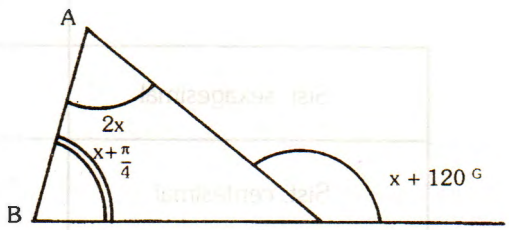
16. Calcular el área y el perímetro de la superficie sombreada $\left(\alpha = \frac{\pi}{7}\right)$.



.....

.....

17. Calcular los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{ABC}$.



.....

.....

Para recordar

	giro
Sist. sexagesimal	360°
Sist. centesimal	400^{G}
Sist. circular	2π
Sist. horario	24^{h}

GUIA DE ESTUDIO II

2.1 Funciones trigonométricas

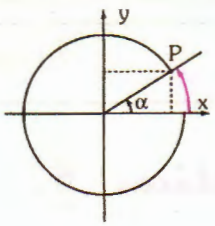
Para aplicar (A)
Para ejercitar (ejercicios n° 1 al 16)

2.2 Relaciones entre los valores de las funciones trigonométricas

Para aplicar (B, C, D, E y F)
Para ejercitar (ejercicios n° 17 al 33)

Para recordar

2.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS



Dado en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares, consideremos una circunferencia de radio r con centro en el origen y un ángulo centrado α.

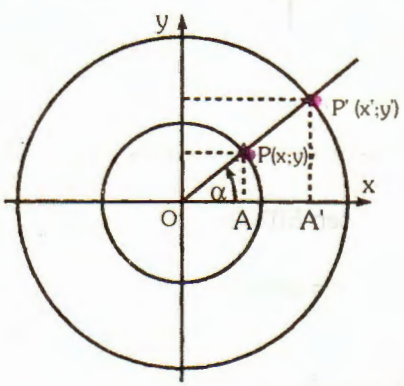
Observemos que α determina sobre la circunferencia un arco de extremo P. Si P tiene coordenadas (x; y) definimos las funciones seno y coseno del ángulo α:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{ordenada de P}}{\text{radio}} = \frac{y}{r} \quad (1)$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{abscisa de P}}{\text{radio}} = \frac{x}{r}$$

Del análisis de las definiciones dadas resulta que si consideramos otra circunferencia C (o, r'), ($r \neq r'$) y el mismo ángulo α éste determina sobre C (o, r') un punto P' = (x';y') siendo:

long $\overline{OP}$ = r
long $\overline{OP'}$ = r'



Aclaración: en lo que sigue escribiremos:

$\overline{OP}$ = r

$\overline{OP'}$ = r'

sobreentendiendo que nos referimos a las longitudes de $\overline{OP}$ y $\overline{OP'}$

Por (1):

$$\text{sen } \alpha = \frac{y}{r} \quad (C\,(o,r)) \qquad \text{y sen } \alpha = \frac{y'}{r'} \quad (C\,(o,r'))$$

y como $\overset{\Delta}{OAP} \sim \overset{\Delta}{OA'P'}$:

$$\text{entonces } \frac{y}{r} = \frac{y'}{r'}$$

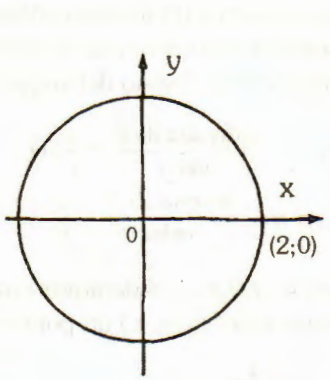
Conclusión: La función seno depende únicamente de α.

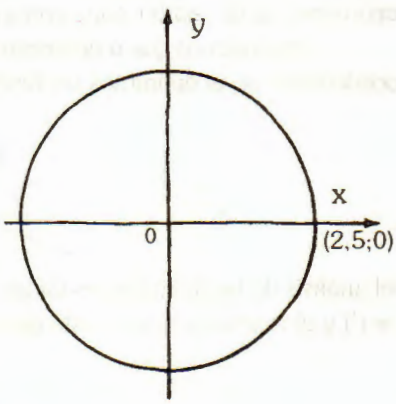
Igualmente se puede demostrar que:

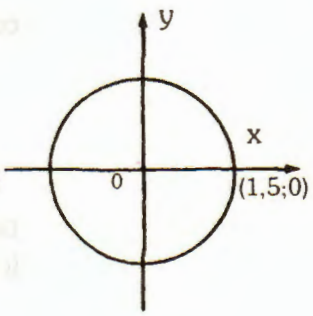
La función coseno depende sólo de α.

Para aplicar (A)

(a) Construir en cada caso un ángulo centrado de 50° y obtener por medición sen 50° y cos 50°:





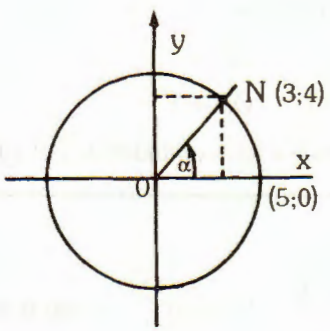


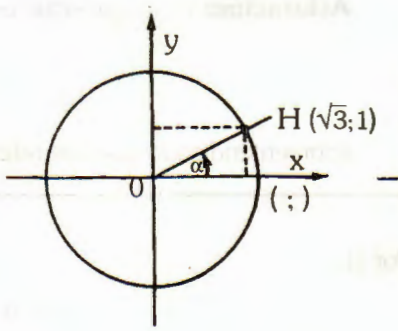
....

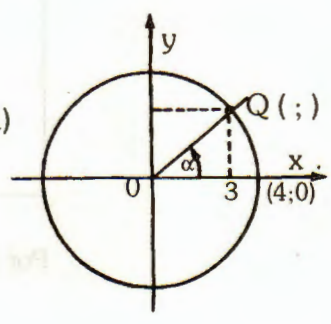
sen 50° = sen 50° = sen 50° =

cos 50° = cos 50° = cos 50° =

(b) Completar:

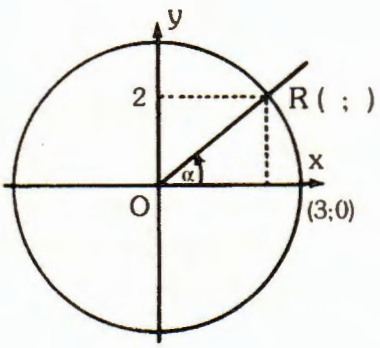




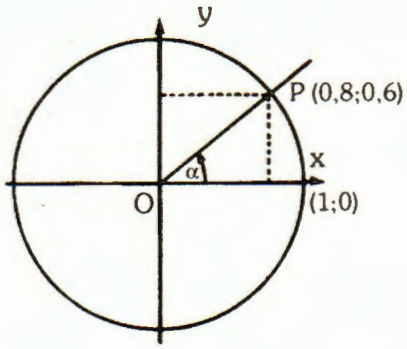


sen α = ... sen α = ... sen α = ...

cos α = ... cos α = ... cos α = ...



sen α = ...
cos α= .....



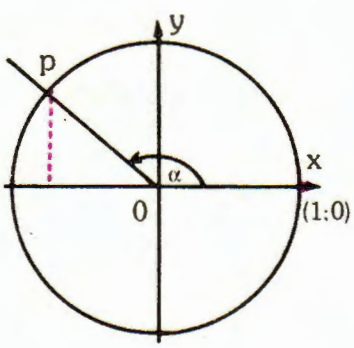
sen α = ...
cos α = ...

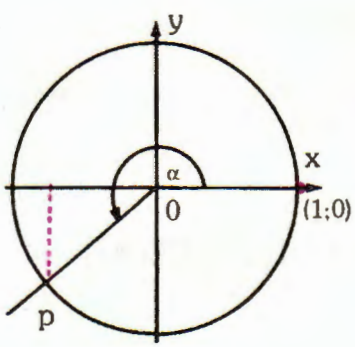
Si la circunferencia tiene radio igual a 1 resulta:

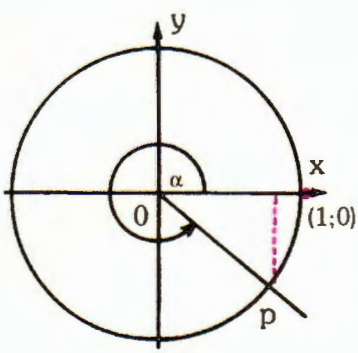
sen α = ordenada de P

Si r = 1, entonces cos = ...

ⓒ Analizar, en cada caso, el signo de sen α y completar.







α pertenece al 2do cuadrante

$90° \leq \alpha \leq 180°$

	signo
sen α	
cos α	

α pertenece al 3er cuadrante

..... ≤ α ≤ .....

	signo
sen α	
cos α	

α pertenece al 4to cuadrante

..... ≤ α ≤ .....

	signo
sen α	
cos α	

(d) Probar que: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$, siguiendo los pasos propuestos.

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = (\ldots\ldots\ldots)^2 + (\ldots\ldots\ldots)^2 = \frac{+}{(\quad)^2} = \frac{\quad}{\quad} = 1$$

A la igualdad demostrada como consecuencia inmediata del teorema de Pitágoras se la conoce como "relación pitagórica".

A partir de las funciones seno y coseno definimos las restantes funciones trigonométricas: tangente. cotangente, secante y cosecante.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{y}{x}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{x}{y}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{1}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{1}{\frac{y}{r}} = \frac{r}{y}$$

$$\text{sec}\,\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{r}{x}$$

Observación: Las funciones tangente y secante no están definidas para los valores que anulan el coseno del ángulo.
Las funciones cotangente y cosecante no están definidas para los valores que anulan el seno del ángulo.

PARA EJERCITAR

1. Expresar en función de sen α:

cosec α= ..... , si sen $\alpha \neq 0$

cos α= ..... ,

sec α = ... , si sen $\alpha \neq \pm 1$

tg α = ... , si sen $\alpha \neq \pm 1$

cotg α =..... , si sen $\alpha \neq 0$

2. Expresar en función de tg α:

cotg α = ... , si tg $\alpha \neq 0$

cos α= ..... , (ver sugerencia)

sen α=..... ,

cosec α= ..... ,si tg $\alpha \neq 0$

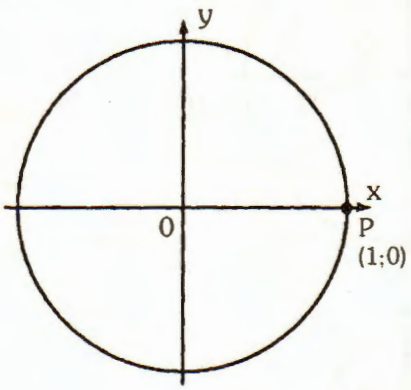
sec α= ..... ,

La validez de las fórmulas depende en todos los casos de la existencia de tg α.

Sug.: Partir de $\frac{\text{sen}^2\,\alpha}{\cos^2\alpha} = \text{tg}^2\,\alpha$ y sumar 1 en los dos miembros.

3. Obtener los valores de las funciones para el ángulo α indicado en cada caso:

a) $\alpha = 0°$



sen 0° = ...

cos 0° = ...

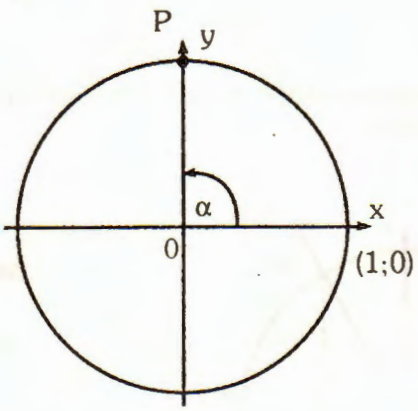
tg 0°= .....

cosec 0° = ...

sec 0° = ...

cotg 0° = ...

b) $\alpha = 90°$



sen 90° = ...

cos 90° = ...

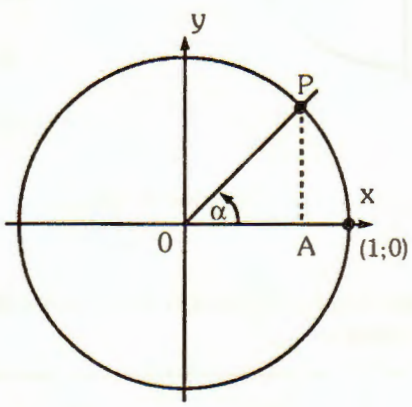
tg 90°= .....

cosec 90° = ...

sec 90° = ...

cotg 90° = ...

c) $\alpha = 45°$



sen 45° = ...

cos 45° = ...

tg 45°= .....

cosec 45° = ...

sec 45° = ...

cotg 45° = ...

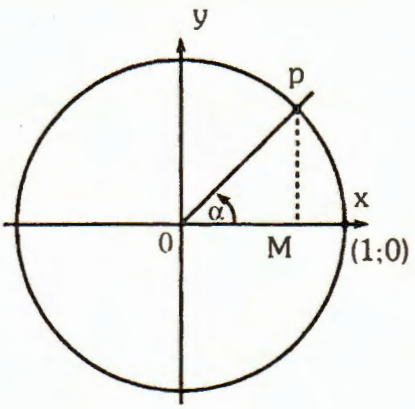
Sug. 1: ΔOAP es isósceles. (¿por qué?)

Sug. 2: Obtener la abscisa y la ordenada de P aplicando el teorema de Pitágoras.

.....

.....

d) $\alpha = 30°$



sen 30° = ...

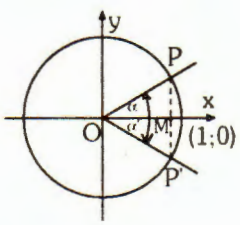
cos 30° = ...

tg 30° = ...

cosec 30° = ...

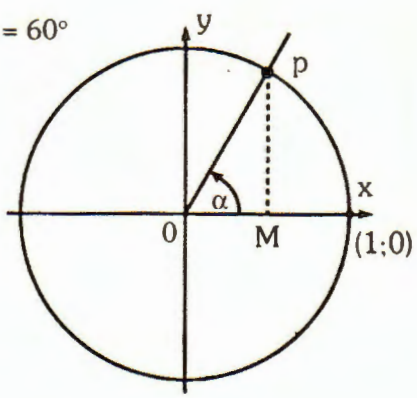
sec 30° = ...

cotg 30° = ...



Sug.: Utilizar como ángulo auxiliar $\alpha' = -30°$ y trabajar con el triángulo OPP' para calcular la abscisa y la ordenada de P.

e) $\alpha = 60°$



sen 60° = ...

cos 60° = ...

tg 60° = ...

cosec 60° = ...

sec 60° = ...

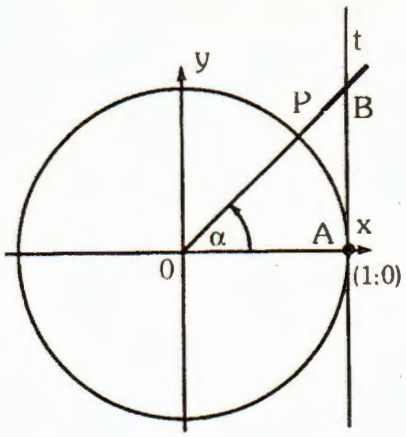
cotg 60° = ...

Sug.: Tener en cuenta los valores obtenidos en (d).

4. Con los valores obtenidos en el ejercicio 3 completar la siguiente tabla que después será utilizada para resolver ejercicios:

	0°	30°	45°	60°	90°
sen					
cos					

5.



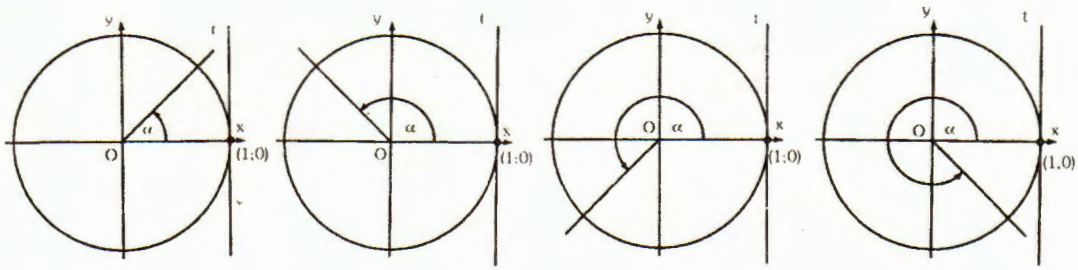
A partir del punto A = (1; 0) se ha trazado la recta t perpendicular al eje X, siendo $\overrightarrow{OP} \cap t = \{B\}$

Demostrar que:

tg α = $\overline{AB}$ = ordenada de B

.....

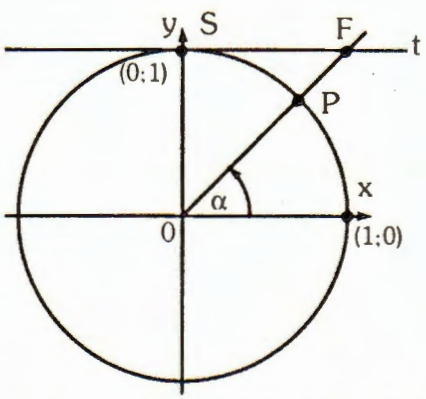
6. Dado α determinar, en cada caso, tg α e indicar su signo.



....

....

7.



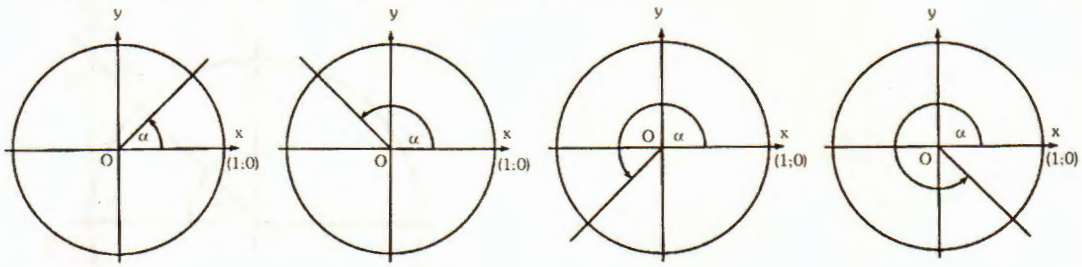
A partir del punto S = (0;1) se ha trazado la recta t perpendicular al eje Y, siendo $\overrightarrow{OP} \cap t = \{F\}$

Demostrar que:

cotg α= $\overline{SF}$ = abscisa de F

.....

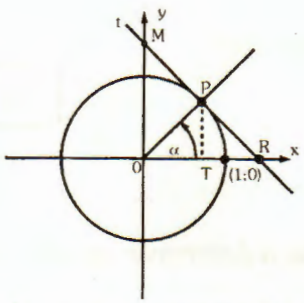
8. Dado α determinar, en cada caso, cotg α, e indicar su signo.



....

....

9.



Por el punto P se ha trazado la recta t tangente a la circunferencia, siendo R y M las intersecciones de t con el eje X y el eje Y respectivamente.
Demostrar que:

a) sec α = $\overline{OR}$ = abscisa de R
b) cosec α = $\overline{OM}$ = ordenada de M

Sug.: Considerar el triángulo auxiliar $\overset{\Delta}{OTP}$

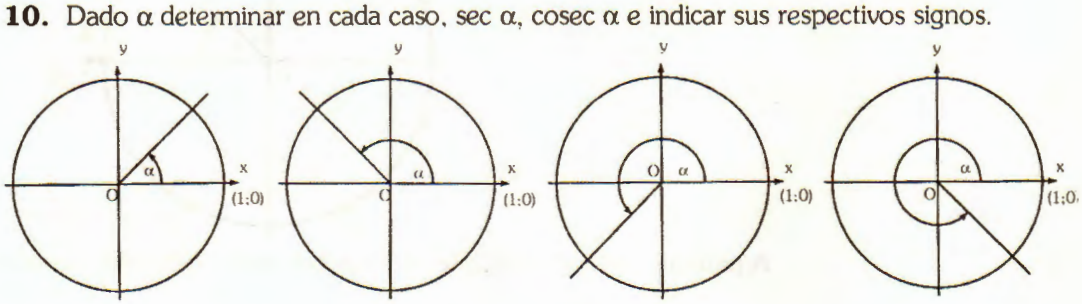
a) Comparar con el $\overset{\Delta}{OPR}$ b) Comparar con el $\overset{\Delta}{OPM}$.

.....

.....

.....

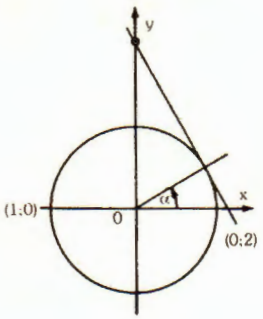
10. Dado α determinar en cada caso, sec α, cosec α e indicar sus respectivos signos.

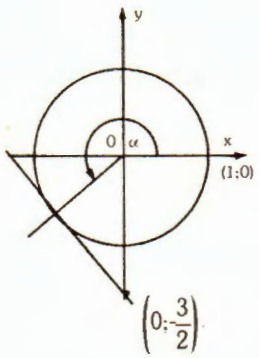


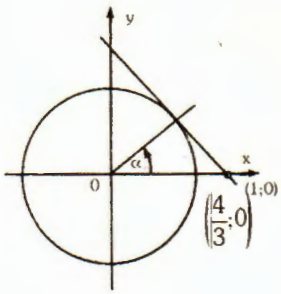
....

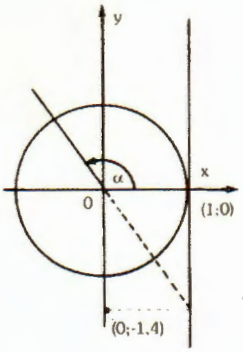
....

11. Indicar el valor de sen α.









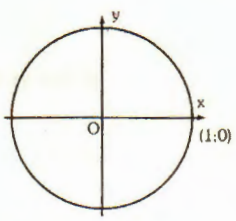
....

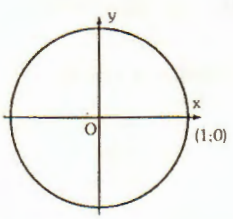
....

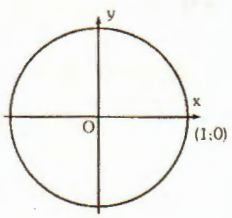
Sug.: tener en cuenta la conclusión del ej. 9 y las definiciones de las funciones trigonométricas.

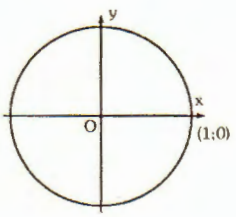
12. Determinar gráficamente α.

a) sen $\alpha = \frac{1}{3}$ b) cos $\alpha = \frac{3}{5}$ c) cotg $\alpha = -2$ d) sec $\alpha = -1,5$









Sug.: remitirse a Para aplicar A (parte b).

13. Calcular, sin conocer el ángulo, la superficie del triángulo $\overset{\Delta}{BAC}$ rectángulo en A sabiendo que sen B = $\frac{3}{5}$ y b = 4 cm. Construir $\overset{\Delta}{BAC}$ utilizando los datos dados.

.....

.....

.....

14. Calcular, sin conocer el ángulo, el perímetro del triángulo $\overset{\Delta}{BAC}$ rectángulo en A sabiendo que cosec C = 3 y b = 6 cm. Construir $\overset{\Delta}{BAC}$ con los datos dados.

.....

.....

.....

15. Determinar las demás funciones de α siendo :

a) $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ y $\alpha > 90°$

b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{-3}{4}$ y $\alpha < 270°$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

c) $\sec\alpha = 4$ y $\operatorname{tg}\alpha < 0$

d) $\operatorname{sen}(-\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{3}$ y $\cos(-\alpha) < 0$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

16. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\cos\alpha\,(\operatorname{tg}\alpha + 1) = \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha$ si $\cos\alpha \neq 0$

.....

.....

b) $\sec^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sec^2\alpha\,(1 - \operatorname{sen}^2\alpha)}$ si $\cos\alpha \neq 0$ y $\operatorname{sen}\alpha \neq 1$

.....

.....

c) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha}{\sec^2\alpha - 1} = \operatorname{sen}^2\alpha$ si $\cos\alpha \neq 0$ y $\sec\alpha \neq \pm 1$

.....

.....

d) $\sec^2\alpha = (\sec^2\alpha - 1)\operatorname{cosec}^2\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$

.....

.....

e) $tg^2\alpha - sen^2\alpha = \dfrac{sen^2\alpha \cdot sec^2\alpha}{cosec^2\alpha}$ si $sen\,\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$

.....

.....

f) $\dfrac{sec^4\alpha - cosec^4\alpha}{sec^2\alpha + cosec^2\alpha} = sec^2\alpha - cosec^2\alpha$ si $sen\,\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$

.....

.....

g) $sec^2\alpha\,(cosec\,\alpha + 1) - tg\,\alpha\,(sec\,\alpha - tg\,\alpha) = \dfrac{1}{sen\,\alpha} + 2\,tg^2\alpha + 1$

si $sen\,\alpha \neq 0$ y $\cos\alpha \neq 0$

.....

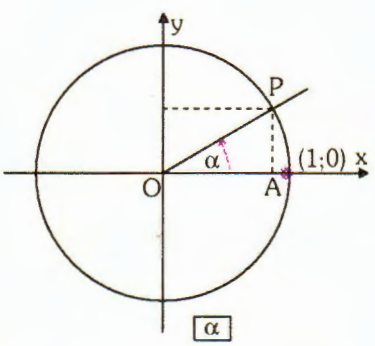
.....

2.2 RELACIONES ENTRE LOS VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

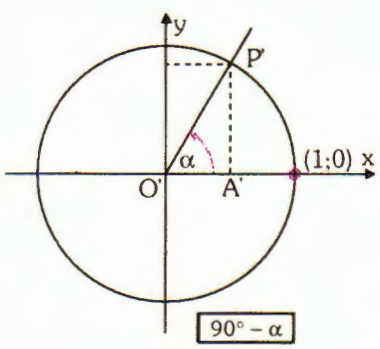
Ángulos complementarios

Dos ángulos $\widehat{\alpha}$ y $\widehat{\beta}$ son complementarios si $\alpha + \beta = 90°$.
De la definición resulta la igualdad: $\beta = 90° - \alpha$ que expresa que la amplitud del complemento de α es $90° - \alpha$.

Si α es un ángulo del primer cuadrante entonces su complemento pertenece al primer cuadrante:



α



90° − α

Comparando $\overset{\Delta}{OAP}$ y $\overset{\Delta}{O'A'P'}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1R \\ \alpha = A'\widehat{P'O'} \text{ (ambos tienen el mismo complemento)} \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$

resulta: $\overset{\Delta}{OAP} \cong \overset{\Delta}{O'A'P'}$

luego: $\overline{A'P'} = \overline{OA} \implies$ ordenada de P' = abscisa de P

$\implies$ $\boxed{sen\,(90° - \alpha) = \cos\alpha}$

y $\overline{O'A'} = \overline{AP} \Longrightarrow$ abscisa de P' = ordenada de P

$\Longrightarrow$ $\boxed{\cos(90° - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha}$

De las dos fórmulas anteriores se deducen:

$$\operatorname{tg}(90° - \alpha) = \frac{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cotg} \alpha$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{sen}(90° - \alpha)} = \frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$$

$$\sec(90° - \alpha) = \frac{1}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{1}{\operatorname{sen} \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$$

$$\operatorname{cotg}(90° - \alpha) = \frac{\cos(90° - \alpha)}{\operatorname{sen}(90° - \alpha)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$$

Las fórmulas demostradas valen para α perteneciente a cualquiera de los cuatro cuadrantes.

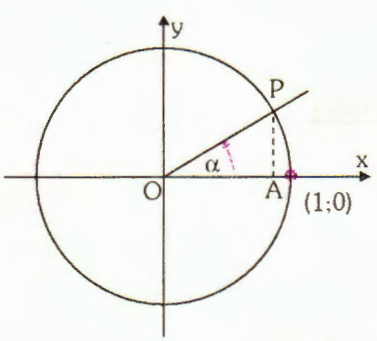
Conclusión: Si dos ángulos son complementarios las funciones de uno son iguales a las cofunciones de su complemento.

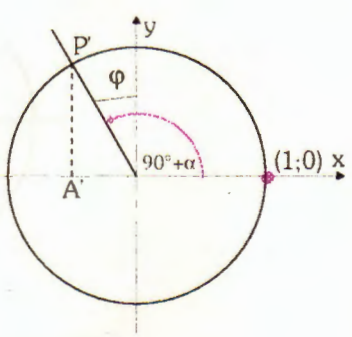
Ángulos que difieren en 90°

Dos ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ difieren en 90° si $\beta - \alpha = 90°$

entonces $\beta = 90° + \alpha$

Si α es un ángulo del primer cuadrante, ß de amplitud $90° + \alpha$ pertenece al segundo cuadrante:





comparando $\overset{\Delta}{OAP}$ y $\overset{\Delta}{O'A'P'}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1\ R \\ \alpha = O'P'A' \ (\varphi = O'P'A' \text{ por ser alternos internos y } \varphi = \alpha \Rightarrow \alpha = O'P'A') \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$

resulta: $\overset{\Delta}{OAP} \cong \overset{\Delta}{O'A'P'}$

luego: $\overline{A'P'} = \overline{OA} \Rightarrow$ ordenada de P' = abscisa de P

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{sen } (90° + \alpha) = \cos \alpha}$

$\overline{O'A'} = \overline{AP} \Rightarrow$ abscisa de P' = – ordenada de P

$\Rightarrow$ $\boxed{\cos (90° + \alpha) = - \text{ sen } \alpha}$

Para aplicar (B)

(a) Completar:

tg $(90° + \alpha)$ = ...

cosec $(90° + \alpha)$ = ...

sec $(90° + \alpha)$ = ...

cotg $(90° + \alpha)$ = ...

Las fórmulas demostradas valen para α perteneciente a cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Conclusión: si dos ángulos difieren en $\frac{\pi}{2}$ .....

.....

(b) Responder V o F. Justificar.

sen $(90° - \alpha) + \cos \alpha = 2 \cos \alpha$ .....

.....

sen $(90° + \alpha) + \cos \alpha = 2 \cos \alpha$ .....

.....

tg $(90° - \alpha)$ - tg $(90° + \alpha) = 0$ .....

.....

sen 30° = cos 60° .....

.....

tg 50° = - cotg 40° .....

.....

cos 120° = sen 30° .....

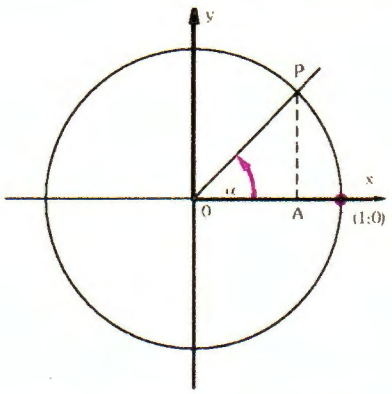
.....

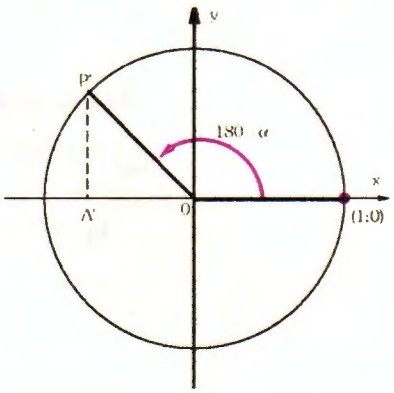
Ángulos suplementarios

Dos ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son suplementarios si $\alpha + ß = 180°$

De la definición resulta la igualdad $ß = 180° - \alpha$ que expresa que la amplitud del suplemento de α es $180° - \alpha$.

Si α es un ángulo del primer cuadrante, su suplemento pertenece al segundo cuadrante:





comparando $\overset{\Delta}{OAP}$ y $\overset{\Delta}{O'A'P}$ $\left\{ \begin{array}{l} OAP = O'A'P' = 1\ R \\ P'O'A' = \alpha \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{array} \right.$

resulta $\overset{\Delta}{OAP} \equiv \overset{\Delta}{O'A'P}$

luego: $\overline{A'P'} = \overline{AP} \Rightarrow$ ordenada de P' = ordenada de P

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen } (180° - \alpha) = \text{sen } \alpha}$$

y $\overline{O'A'} = \overline{OA} \Rightarrow$ abscisa de P' = - abscisa de P

$$\Rightarrow \boxed{\cos (180° - \alpha) = - \cos \alpha}$$

Para aplicar ©

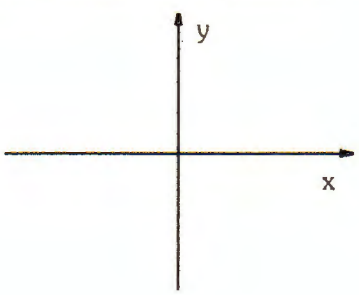
ⓐ Completar:

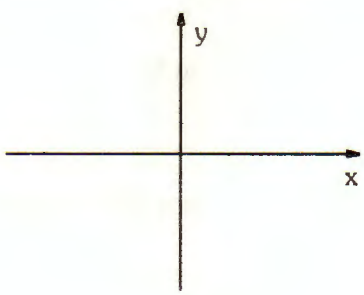
ÁNGULOS QUE DIFIEREN EN 180°

Dos ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ difieren en 180° si $ß - \alpha =$ .....

entonces $ß =$ .....

Si α es un ángulo del primer cuadrante .....





comparando { ..... ; ..... ; ..... } ..... y .....

resulta: .....

Luego ..... = ... ⇒ ..... = ...

⇒ sen (180° + α) = ...

y ..... = ... ⇒ ..... = ...

⇒ cos (180° + α) = ...

ⓑ Deducir:

tg (180° - α) = ...

cosec (180° - α) = ...

sec (180° - α) = ...

cotg (180° - α) = ...

tg (180° + α) = ...

cosec (180° + α) = ...

sec (180° +α) = ...

cotg (180° + α) = ...

ⓒ Completar:

Las fórmulas demostradas para ángulos suplementarios y para ángulos que difieren en 180° valen para α perteneciente a cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Conclusión 1: si dos ángulos son suplementarios .....

.....

Conclusión 2: si dos ángulos difieren en 180° .....

.....

ⓓ Responder V o F. Justificar.

sen 150° = sen 30° .....

cos 150° = - cos 60° .....

sec 210° = - sen 30° .....

tg 130° = cotg 50° .....

sen 60° = - sen 240° .....

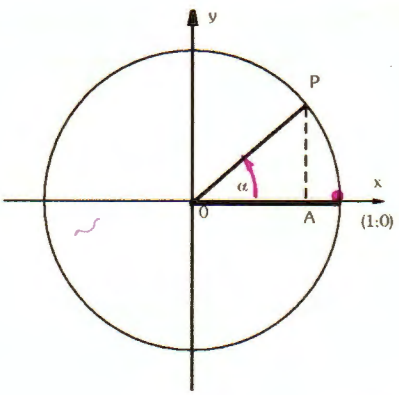
cotg 225° = - cotg 45° .....

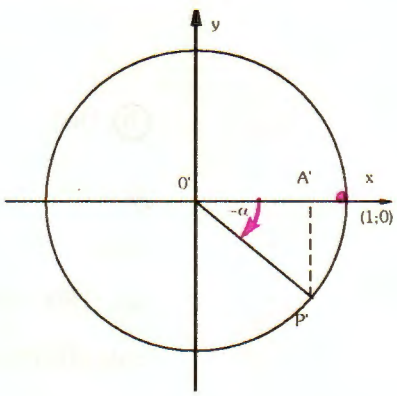
Ángulos opuestos

Dos ángulos $\hat{\alpha}$ y $\hat{\beta}$ son opuestos si $\alpha + ß = 0°$

De la definición resulta la igualdad $ß = -\alpha$ que expresa que el ángulo opuesto a α tiene la misma amplitud que α pero distinto signo.

Si α es un ángulo del primer cuadrante su opuesto pertenece al cuarto cuadrante:





comparando $\overset{\Delta}{OAP}$ y $\overset{\Delta}{O'A'P}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1\ R \\ \overline{OP} = O'P' \\ POA = P'O'A' \end{cases}$

resulta $\overset{\Delta}{OAP} \equiv \overset{\Delta}{O'A'P}$

luego: $\overline{A'P'} = \overline{AP} \Rightarrow$ ordenada de P' = – ordenada de P

$$\Rightarrow \boxed{\text{sen } (-\alpha) = -\text{ sen } \alpha}$$

y $\overline{O'A'} = \overline{OA} \Rightarrow$ abscisa de P' = abscisa de P

$$\Rightarrow \boxed{\cos (-\alpha) = \cos \alpha}$$

Para aplicar (D)

(a) Deducir:

tg (- α) = ...

cosec (-α) = ...

sec (-α) = ...

cotg (- α) = ...

Las fórmulas demostradas para ángulos opuestos valen para α perteneciente a cualquiera de los cuatro cuadrantes.

Conclusión: Si dos ángulos son opuestos sus funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo. excepto el coseno y la secante que conservan el signo.

ⓑ Responder V o F. Justificar.

tg (- 30°) = - tg 30° .....

.....

sec 60° = - sec (- 60°) .....

.....

- cos (- 45°) = - cos 45° .....

.....

-tg (-60°) - tg 60° = -2 tg 60° .....

.....

cos (- 30°) . cos 30° - sen (- 30°) . sen 30° = 1 .....

.....

sen (- 45°) + sen 45° = 0 .....

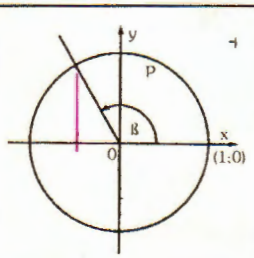
.....

Reducción de ángulos al primer cuadrante

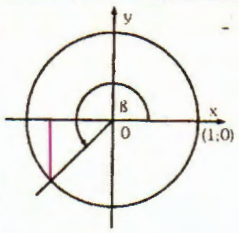
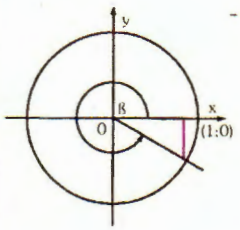
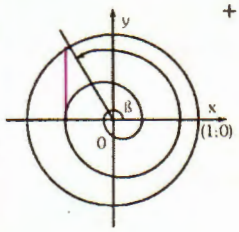
Conociendo los valores de las funciones trigonométricas para ángulos del primer cuadrante, es posible, analizando previamente el signo y utilizando las relaciones anteriores, obtener los valores que toman dichas funciones para cualquier ángulo.

Ejemplo: Calcular sen ß

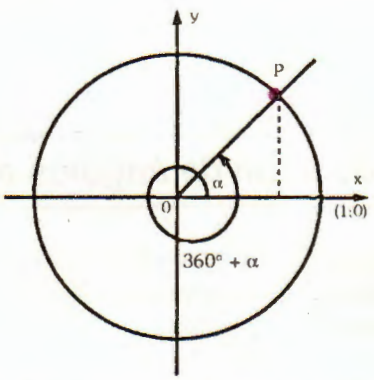
1) ß es positivo

ß	signo de sen ß	relacionar con	valor de sen ß
120°		ángulos suplementarios 120° = 180° - α α = 60°	sen 60°

sen 120° = sen 60°

ß	signo de sen ß	relacionar con	valor de sen ß	
225°	 -	ángulos que difieren en 180° 225° = 180° + α α = 45°	- sen 45°	sen 225° = -sen 45°
330°	 -	330°= 360° - α α = 30°	- sen 30°	sen 330° = - sen 30°
840°	 +	primer caso 840° = 2.360°+ 120°	sen 60°	sen 840° = sen 60°

Observamos que a α y a 360° + α que difieren en un giro, les corresponde el mismo punto P de la circunferencia.



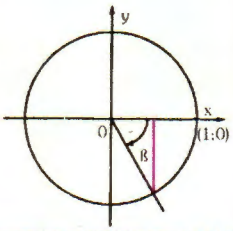
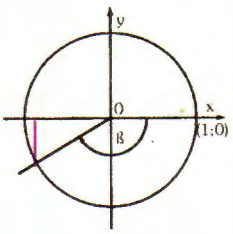
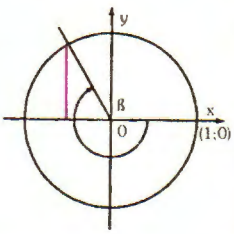
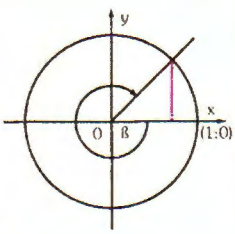
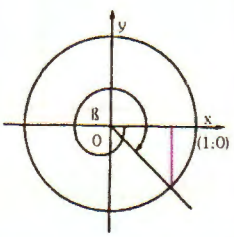
Por lo tanto el valor de una función trigonométrica en α es el mismo que en 360° + α.
Esto también ocurre para cualquier ángulo que difiera de α en un número exacto de giros en cualquiera de los dos sentidos.
Si el valor del ángulo es muy grande, por ejemplo, α = 10320°, dividiendo a éste por 360° resulta:

$$\begin{array}{r|l} 10320 & 360 \\ 3120 & 28 \\ 240 & \end{array}$$

10320° = 28.360° + 240°
es decir:

α = 10320° y α' = 240° difieren en 28 giros.
Luego: sen 10320° = sen (28.360° + 240°) = sen 240° (que se reduce al segundo caso).

II) ß es negativo

ß	signo de sen ß	relacionar con	valor de sen ß	
- 60°		ángulos opuestos - 60° + α = 0° α= 60°	- sen 60°	sen (-60°) = -sen 60°
-150°		ángulos suplementarios -150° = - (180° - α) α= 30°	- sen 30°	sen (-150°) = -sen 30°
-240°		ángulos que difieren en180° - 240° = - (180 + α) α = 60°	sen 60°	sen (-240°) = sen 60°
-315°		- 315° = - (360° - α) - 315° = - 360° + α α= 45°	sen 45°	sen (-315°) = sen 45°
-405°		primer caso - 405° = - (360° + 45°)	- sen 45°	sen (-405°) = -sen 45°

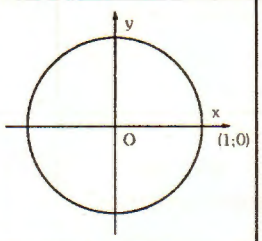
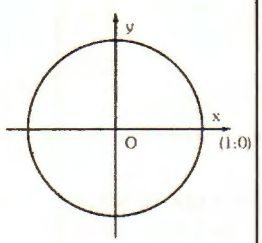
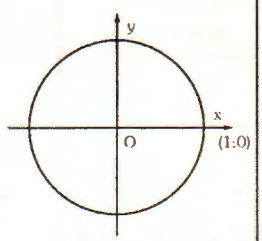
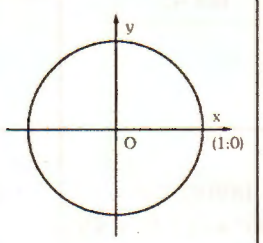
Observación: En general, si α y ß difieren en K giros, es:

ß = α + 2Kπ con K ε Z

y el valor de una función trigonométrica en α es el mismo que en ß.

Para Aplicar (E)

(a) Calcular cos ß

ß	signo de sen ß	relacionar con	valor de cos ß	
150°				cos 150°=
- 45°				cos (- 45°)=
- 120°				cos (- 120°)=
- 495°				cos 495°=

(b) Calcular, reduciendo previamente al primer cuadrante.

b_1) sec 300° + cosec 150° = ...

.....

b_2) cosec (- 90°) + sec 315° = ...

.....

b_3) tg (-330°) - cotg 210° = ...

.....

b_4) sen (-810°) + tg (-225°) = ...

.....

b_5) sec (-45°) + cos 675° = ...

.....

b_6) sec $\left(-\frac{7\pi}{4}\right)$ + sec $\frac{3\pi}{4}$ = ...

.....

b_7) cotg $\frac{8\pi}{3}$ + cos $\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$ = ...

.....

Ángulos cuyo seno es cero

El problema a resolver consiste en hallar la expresión general de α que satisface sen $\alpha = 0$

si $0 \leq \alpha < 2\pi$ entonces:

$$\text{sen } \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = \pi$$

si $-2\pi < \alpha < 0$ entonces:

$$\text{sen } \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\pi$$

Tenemos por lo tanto tres valores de α que satisfacen sen $\alpha = 0$:
$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \pi$; $ß_1 = -\pi$
A partir de α_1, α_2 y $ß_1$ se obtienen infinitos valores de α para los cuales la función seno toma el valor cero.
De α_1 y α_2 resultan:

$\alpha_3 = \alpha_1 + 2\pi = 0 + 2\pi = 2\pi$
$\alpha_4 = \alpha_2 + 2\pi = \pi + 2\pi = 3\pi$

y como α_3 y α_4 difieren respectivamente en un giro de α_1 y α_2 es:

sen $\alpha_3 = 0$ y sen $\alpha_4 = 0$

De α_3 y α_4 resultan:

$\alpha_5 = \alpha_3 + 2\pi = 4\pi$
$\alpha_6 = \alpha_4 + 2\pi = 5\pi$

siendo:

sen $\alpha_5 = 0$ y sen $\alpha_6 = 0$

Continuando este procedimiento indefinidamente se obtienen todos los valores positivos de α para los cuales sen $\alpha = 0$.

Análogamente, partiendo de α_1 y $ß_1$ pero sumando esta vez un giro de sentido contrario al anterior, resultan todos los valores negativos para los cuales se anula el seno.

Así, por ejemplo, de α_1 y $ß_1$ se obtienen:

$$\beta_2 = \alpha_1 + (-2\pi) = -2\pi$$
$$ß_3 = ß_1 + (-2\pi) = -3\pi$$

siendo:

$$\text{sen } \beta_2 = 0 \text{ y sen } ß_3 = 0$$

Ordenando los valores encontrados:

..... $-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi$ y teniendo presente el procedimiento mediante el cual los obtuvimos podemos afirmar.

> Del producto de cualquier número entero por π resulta un valor para el cual el seno es cero.
> Luego: $\text{sen } \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = K\pi$, con $K \varepsilon Z$.

Ángulos cuyo coseno es cero

Se procede como en el caso del seno, partiendo de los valores

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \alpha_2 = \frac{3}{2}\pi \qquad \beta_1 = -\frac{\pi}{2} \qquad \beta_2 = -\frac{3}{2}\pi$$

> Para la función coseno se verifica que:
> $\cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = (2K + 1)\frac{\pi}{2}$. $K \varepsilon Z$
> es decir, reemplazando a K por cualquier número entero se obtiene un valor para el cual se anula el coseno.

Para aplicar (F)

(a) Elegir la opción verdadera.

$a_1)$ $\alpha = 2\pi$ < sen $\alpha = 0$ / cos $\alpha = 0$

$a_2)$ $\alpha = -\frac{5\pi}{2}$ < sen $\alpha = 0$ / cos $\alpha = 0$

$a_3)$ $\alpha = \frac{6\pi}{4}$ < sen $\alpha = 0$ / cos $\alpha = 0$

$a_4)$ $\alpha = -\frac{6\pi}{2}$ < sen $\alpha = 0$ / cos $\alpha = 0$

(b) Completar.

$b_1)$ tg $\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha =$ .....

$b_2)$ cotg $\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha =$ .....

$b_3)$ tg α no está definida si $\alpha =$ .....

b_4) cotg α no está definida si α = ...

Sug.: tener en cuenta que: $\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha}$ y $\text{cotg } \alpha = \frac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha}$

PARA EJERCITAR

17. Hallar la expresión general de α que satisface:

a) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = 0$ .....

.....

b) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0$ .....

.....

18. Demostrar las siguientes identidades.

a) $\text{cotg } (90° + \alpha) + \cos (90° + \alpha) \text{ cosec } (90° - \alpha) = -2\text{tg } \alpha$ si $\alpha \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

b) $\sec (90° - \alpha) + \sec (90° + \alpha) = 0$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

.....

c) $\text{tg } (90° + \alpha) + \text{cotg } (90° + \alpha) = \frac{1}{\cos (90° + \alpha) \text{ sen } (90° - \alpha)}$ si $\alpha \neq K\pi$ y $\alpha \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

d) $\text{sen } (90° - \alpha) \text{ cosec } (90° + \alpha) = 1$ si $\alpha \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

19. Comprobar que:

a) $\text{sen } (180° + \alpha) \cos (180° - \alpha) \text{ tg } \alpha = \text{sen}^2 (180° - \alpha)$ si $\alpha \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

b) $\cos (180° - \alpha) \text{ cotg } (180° + \alpha) \text{ sen } (180° + \alpha) = \cos^2 \alpha$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

.....

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(180° + \alpha) + \cos(180° + \alpha) + \cos\alpha}{\operatorname{sen}(180° - \alpha)} = -1$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

.....

d) $\left[\operatorname{sen}(180° + \alpha) + 2\operatorname{sen}(180° - \alpha)\right]^2 + \dfrac{\cos(180° + \alpha)\operatorname{cotg}(180° - \alpha)}{\operatorname{cosec}(180° - \alpha)} = 1$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

.....

.....

e) $\sqrt[3]{\dfrac{1 + \operatorname{sen}(\pi + \alpha)\operatorname{sen}(\pi - \alpha)}{\sec\alpha}} + \sqrt[3]{\dfrac{1 - \cos(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha)}{\operatorname{cosec}\alpha}} = \cos\alpha - \operatorname{sen}(\pi + \alpha)$ si $\alpha \neq K\pi$ y $\alpha \neq (2K + 1)\dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

20. Demostrar las fórmulas que relacionan los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que difieren en 270°.

.....

.....

.....

21. Demostrar las fórmulas que relacionan los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos $270° - \alpha$ y α.

.....

.....

.....

22. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\operatorname{tg}(180° - \alpha) + \operatorname{cotg}(270° - \alpha) + \operatorname{sen}(180° + \alpha) + \cos(270° + \alpha) = 0$ si $\alpha \neq (2K + 1)\dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(180° + \alpha) + \operatorname{sen}(180° - \alpha) + \operatorname{sen}(270° + \alpha)}{\cos(-\alpha)} = -1$ si $\alpha \neq (2K + 1)\dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

c) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)} = \cos - \cos^2\alpha$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

.....

.....

d) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = 2\operatorname{sen}\alpha$

.....

.....

.....

e) $[1-\operatorname{sen}(\pi+\alpha)]\cos(\pi+\alpha)\operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{1-\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}$ si $\alpha \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

.....

23. Hallar el valor de x:

a) $x = \dfrac{\operatorname{tg}(90°-\alpha)\sec(90°-\alpha)}{\operatorname{cosec}(90°+\alpha)} - \operatorname{sen}(90°-\alpha)\cos(90°+\alpha)$ si $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$

.....

.....

.....

b) $x = \operatorname{sen}(90°+\alpha) + \operatorname{tg}(270°-\alpha) + \operatorname{cotg}(-\alpha)\operatorname{sen}(90°-\alpha)$ si $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$

.....

.....

c) $x = \operatorname{sen}(\pi-\alpha)\operatorname{sen}(-\alpha)\sec\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \operatorname{cosec}(\pi+\alpha)\operatorname{cotg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$ si $\cos\alpha = \frac{1}{4}$

.....

.....

.....

d) $x = [\cos(\pi + \alpha) - \operatorname{cosec}(\frac{3\pi}{2} + \alpha) + \operatorname{sen}(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha)] \operatorname{tg}(\pi + \alpha) \sec(2\pi - \alpha)$ si $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$

.....

.....

.....

24. Elegir la opción verdadera. Justificar.

a) $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) + \operatorname{tg}(\pi + \alpha) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \begin{cases} 0 \\ -2\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$

si $\alpha \neq K\pi$ y $\alpha \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2}$

.....

b) $\cos(\pi - \alpha) + \cos(\pi + \alpha) + \cos(-\alpha) + \cos(2\pi + \alpha) = \begin{cases} 0 \\ 2\cos\alpha \end{cases}$

.....

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{sen}(\pi + \alpha) \operatorname{sen}(\pi - \alpha) = \begin{cases} C \\ 1 \end{cases}$

.....

d) $\operatorname{cotg}(\pi - \alpha) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \operatorname{cotg}(\pi + \alpha) = \begin{cases} 0 \\ 2\operatorname{cotg}^2\alpha \end{cases}$ si $\alpha \neq K\pi$

.....

25. Responder verdadero (V) o falso (F). Justificar.

a) $\operatorname{sen}(\alpha - 90°) = -\cos\alpha$ .....

.....

b) $\cos(-270° - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$ .....

.....

c) $\operatorname{tg}(\alpha - 270°) = \operatorname{cotg}\alpha$ .....

.....

d) $\operatorname{sen}(-\alpha - 180°) = -\operatorname{sen}(-\alpha)$ .....

.....

e) $\sec(\alpha - 180°) = -\sec\alpha$ .....

.....

f) $\text{tg}(-\alpha - 360°) = -\text{tg}(-\alpha)$ .....

.....

26. Calcular x sabiendo que:

a) $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3x+2}{5}$ y $\text{cosec}\,\alpha = \dfrac{1}{3x+4}$ si $x \neq -\dfrac{4}{3}$

.....

.....

b) $\text{sen}\,\alpha = x-2$ y $\cos\alpha = 1-x$

.....

.....

c) $\text{tg}\,\alpha = \sqrt{8}$ y $\text{sen}\,\alpha = 2x$

.....

.....

d) $\text{cotg}\,\alpha = 3$ y $\sec\alpha = x$

.....

.....

27. Obtener x .

a) $\text{sen}(3x + 5°) = \cos(2x - 10°)$ si $0 \leq 3x + 5° \leq \dfrac{\pi}{2}$

y $0 \leq 2x - 10° \leq \dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

b) $\cos(2x - 4°) = \text{sen}\left(\dfrac{5x + 8°}{2}\right)$ si $0 \leq 2x - 4° \leq \dfrac{\pi}{2}$

y $0 \leq \dfrac{5x + 8°}{2} \leq \dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

c) $\cos(10x + 6°) = \cos(4x + 28°)$ si $0 \leq 10x + 6° \leq \dfrac{\pi}{2}$

y $0 \leq 4x + 28° \leq \dfrac{\pi}{2}$

.....

.....

d) $\text{sen}\,(4x^2 - 2°) = \text{sen}\,(5x^2 - 18°)$ si $0 \le 4x^2 - 2° \le \frac{\pi}{2}$ y $0 \le 5x^2 - 18° \le \frac{\pi}{2}$

.....

.....

28. Resolver los siguientes sistemas en los que x e y son ángulos positivos menores que π.

a) $\begin{cases} \text{sen } x + \cos y = 1 \\ \sqrt{3}\cos x + \cos y = 2 \end{cases}$

.....

.....

b) $\begin{cases} \text{sen}^2 x + \frac{1}{2}\text{sen}^2 y = 1 \\ \cos x - \text{sen}^2 y = 0 \end{cases}$

.....

.....

c) $\begin{cases} \cos x + 6\,\text{cotg}^2\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = 3 \\ [\text{sen}\,(\pi - x) + \text{sen } y]\,\text{cosec } y = 1 \end{cases}$ si $y \neq K\pi$ e $y \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}$

.....

.....

29. Elegir la opción verdadera . Justificar.

a) $\text{sen}\,\frac{15\pi}{4} + \frac{1}{2}\,\text{cosec}\,(-2025°) =$ $\begin{cases} 0 \\ -\sqrt{2} \end{cases}$

.....

.....

b) $\cos 300° - \text{sen}\,(-225°) + \text{tg}\,\frac{3\pi}{4} =$ $\begin{cases} \frac{-1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-1+\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

.....

.....

c) $\text{sen } \frac{\pi}{3} - \text{sen } (-\frac{\pi}{3}) + \cos \frac{\pi}{3} + \cos (-\frac{\pi}{3}) =$ $\begin{cases} \sqrt{3} + 1 \\ \sqrt{3} \end{cases}$

.....

.....

d) $\sec (-1110°) \text{ tg } 480° - \sec^2 (-855°) =$ $\begin{cases} -4 \\ 0 \end{cases}$

.....

.....

e) $\text{sen } \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{2} + \cos 5\pi =$ $\begin{cases} -\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1) \\ -\frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1) \end{cases}$

.....

.....

30. Indicar verdadero (V) o falso (F). Justificar.

a) $\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{sen } (-45°)$.....

$\frac{\sqrt{2}}{2} = -\text{ sen } (135°)$.....

$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos (-45°)$.....

b) $\frac{\sqrt{3}}{2} = -\text{ sen } 240°$.....

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen } 300°$.....

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 120°$.....

c) $\sqrt{3} = \text{tg } (-600°)$.....

$\sqrt{3} = \text{cotg } 930°$.....

$\sqrt{3} = -\text{tg } (-240°)$.....

31. Desarrollar:

a) $\dfrac{\sec 190° + \sec 360°}{\sec (-10°)}$ siendo $\sec 10° = h$, y $h \neq 0$

.....

b) $\dfrac{\operatorname{tg} 220° - 2 \operatorname{tg}^2 (-40°)}{2 \operatorname{cotg} 50° - 1}$ siendo $\operatorname{tg} 140° = -b$ y $b \neq \dfrac{1}{2}$

.....

32. Hallar el valor de x siendo $0 \leq x < 2\pi$.
Sug: tener en cuenta la tabla del ejercicio 4 de la guía I.

a) $\operatorname{sen} x - 1 = 0$

.....

b) $\operatorname{sen} x = \cos x$

.....

c) $1 - \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$

.....

d) $\operatorname{tg} (2x + 10°) = 1$

.....

e) $\sec 4x = 1$

.....

f) $\operatorname{sen} x + 2 = -\operatorname{cosec} x$ si $\operatorname{sen} x \neq 0$

.....

g) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} (x + 180°) = 0$

.....

h) $\dfrac{2}{\sec^2 (90° + x)} = 1 - \operatorname{tg} x \cos x$ ..... si $\cos x \neq 0$

.....

i) $5 - 4 \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$

.....

.....

33. Obtener x siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

a) $\log_{\cos x} 2 \operatorname{sen} x = 0$

.....

b) $\log_{\cos x} (1 - \operatorname{sen}^2 x) = 1$

.....

c) $4^{\cos x} = 2$

.....

d) $\log_{\frac{1}{2}} \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$

.....

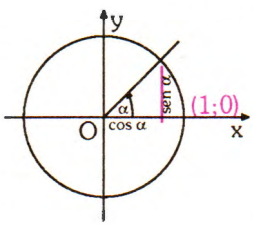
e) $5^{2 \operatorname{sen} x} = 1$

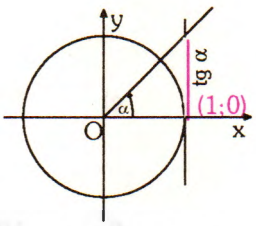
.....

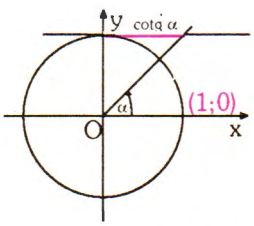
f) $10^{2 \log \operatorname{sen} x} = \cos^2 x$

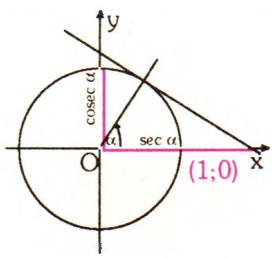
.....

Para recordar









$\beta + \alpha = 90°$	$\beta = 90° - \alpha$	Complementarios
$\beta - \alpha = 90°$	$\beta = 90° + \alpha$	Difieren en 90°
$\beta + \alpha = 180°$	$\beta = 180° - \alpha$	Suplementarios
$\beta - \alpha = 180°$	$\beta = 180° + \alpha$	Difieren en 180°
$\beta + \alpha = 0°$	$\beta = -\alpha$	Opuestos

GUIA DE ESTUDIO III

3.1 Función seno

Para aplicar (A)

3.2 Función coseno

Para aplicar (B)
Para ejercitar (ejercicios n° 1 al 7)

3.3 Funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante

Para aplicar (C, D y E)
Para ejercitar (ejercicios n° 8 al 11)

3.4 Funciones circulares inversas

Para aplicar (F y G)
Para ejercitar (ejercicios n° 12 al 14)

Para recordar

3.1 FUNCIÓN SENO

Un método práctico para representar gráficamente las funciones trigonométricas en un sistema de coordenadas cartesianas, consiste en utilizar una circunferencia auxiliar de radio 1 y centro en el origen del sistema. De esta manera, mediante la medición de los segmentos correspondientes a la función que se quiere representar, se obtienen las ordenadas de los puntos de la gráfica.

En la fig. 1 se ha dibujado la circunferencia auxiliar desplazada hacia la izquierda, esto se ha hecho para facilitar la construcción.

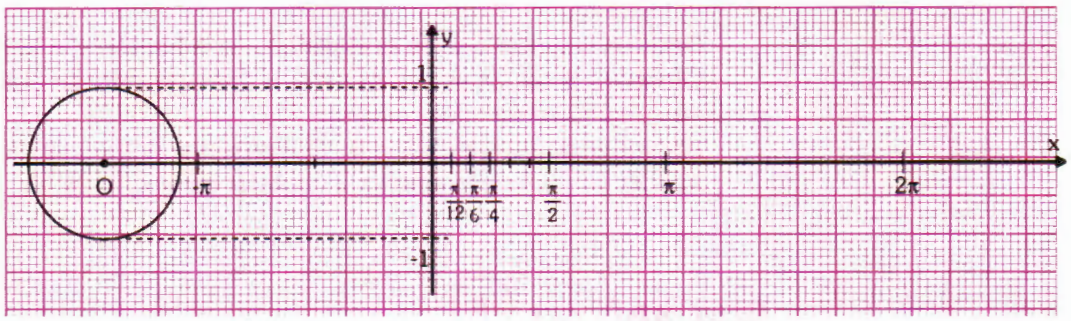


fig. 1

Observemos que sobre el eje de las abscisas se han marcado distintos valores entre 0 y 2π. Estos son los valores que daremos a x para construir la gráfica aproximada de $y = \text{sen } x$. Debemos entonces determinar, para cada uno de ellos, el valor correspondiente que toma sen x.

Teniendo en cuenta que en la circunferencia de radio 1 es: sen x = ordenada de P (fig. 2)

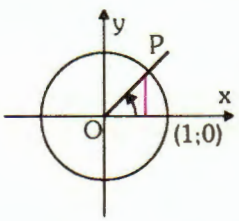


fig. 2

bastará con construir cada uno de los ángulos cuyas medidas se han marcado sobre el eje X y luego transportar sobre el eje Y el valor de la ordenada de cada uno de los puntos P, que determinan dichos ángulos con la circunferencia (fig. 3).

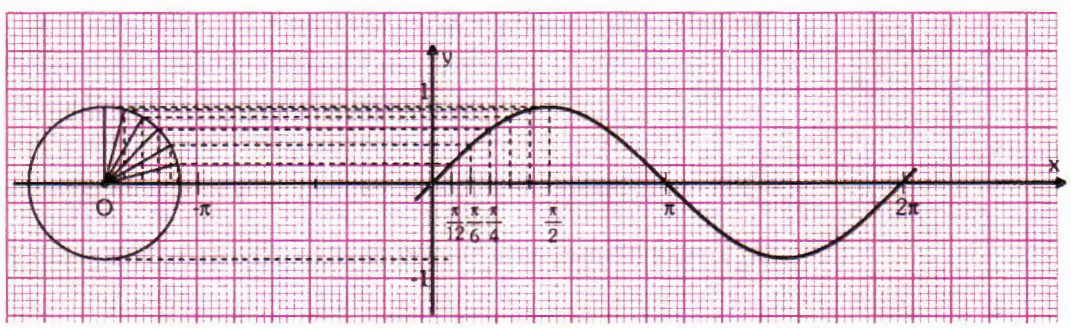


fig. 3

El trozo de gráfica representado para valores de x comprendidos entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 2\pi$ es una onda completa de y = sen x.

Si continuamos la gráfica a derecha e izquierda observaremos la aparición de ondas, una a continuación de otra, todas réplicas de la trazada entre 0 y 2π. Esto se debe a que los valores de la función vuelven a repetirse, pues, como se ha visto en la Guía II, a dos ángulos que difieren en un número exacto de giros les corresponde el mismo punto de la circunferencia y por lo tanto el valor del seno para cada uno de ellos es el mismo.

Es decir:

$$\text{sen } (x + 2K\pi) = \text{sen } x$$

en particular, si K = 1, resulta

$$\text{sen } (x + 2\pi) = \text{sen } x$$

Decimos entonces que 2π es el período de la función y = sen x.

Observemos que 2π es precisamente la distancia entre las abscisas de los puntos donde comienza y termina una onda completa.

Así, volviendo a la gráfica de la fig. 3, la próxima onda a derecha estará comprendida entre $x_2 = 2\pi$ y $x_3 = 4\pi$ y la anterior a izquierda entre $x_2' = -2\pi$ y $x_1 = 0$.

Para aplicar (A)

(a) Continuar la gráfica de y = sen x hacia la derecha hasta $x = 3\pi$ y hacia la izquierda hasta $x = -\pi$.

(b) Observando la gráfica de y = sen x y teniendo en cuenta la definición de la función y sus propiedades, completar:

b_1) Dom sen = { .....}

Recordar: dominio de una función y = f(x), es el conjunto de los valores que puede tomar la variable independiente x de manera tal que exista el valor y = f(x).

b_2) Cod sen = { .....}

Recordar: codominio de una función es el conjunto de los valores que toma la función.

b_3) La función seno no es inyectiva porque .....

.....

Recordar: una función y = f(x) es inyectiva si $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Conclusión: la función seno no es biyectiva.

b_4) El valor máximo de la función es .....y se alcanza para x = ...

b_5) El valor mínimo de la función es .....y se alcanza para x = ...

b_6) Los valores de la función entre 0 y 2π son positivos si ..... < x < .....

b_7) Los valores de la función entre 0 y 2π, son negativos si ..... < x < .....

b_8) La función seno se anula si x = ...

Estos valores en los cuales se anula la función se llaman **ceros de la función**.

b_9) **Una función es par** sí y solo sí, para todo x es **f (x) = f (–x)**.

La gráfica de una función par es simétrica respecto del eje Y.

Una función es impar sí y solo sí, para todo x es **f (–x) = –f (x)** .

La gráfica de una función impar es simétrica respecto del origen.

y = sen x es una función ..... porque .....

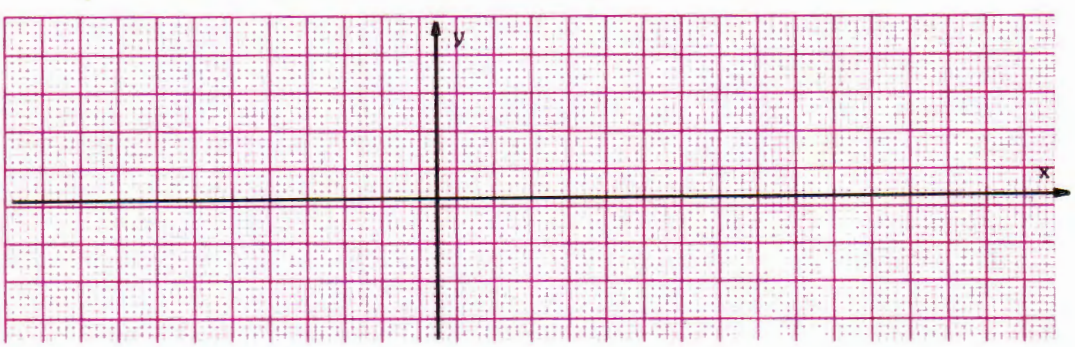
(c) Completar la tabla I:

	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
y = sen x					

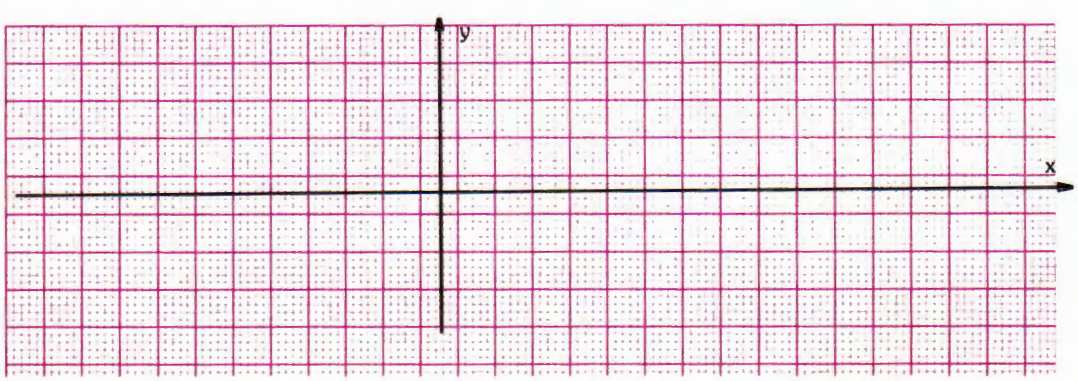
tabla I

(d) Graficar utilizando la circunferencia auxiliar, como en la fig. 3, y luego completar la tabla II.

d_1) y = 3 sen x



d_2) $y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$



	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
$y = 3 \text{ sen } x$					
$y = \frac{1}{2} \text{ sen } x$					

tabla II

(e) Comparar los valores obtenidos en la tabla II con los obtenidos en la tabla I, para completar:

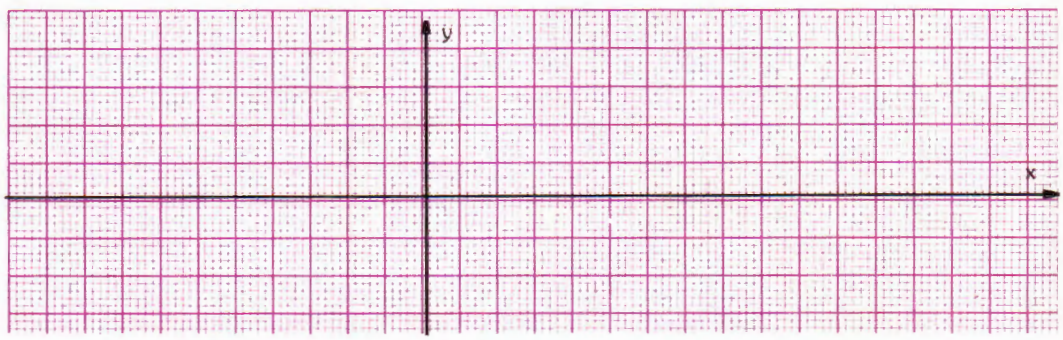
Si $y = A \text{sen } x$ ($A \in R$ y $A > 0$), entonces A indica .....

.....

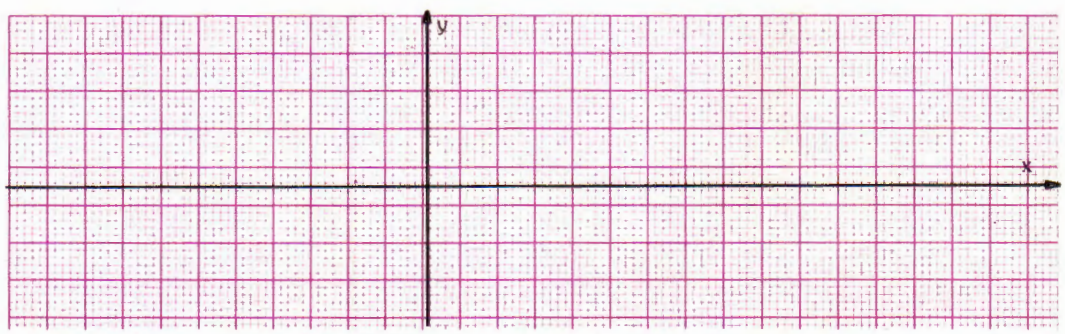
Al parámetro A se lo llama AMPLITUD.

(f) Graficar las siguientes funciones y luego completar la tabla III.

f_1) $y = \text{sen } 4x$



f_2) $y = \text{sen } \frac{1}{3} x$



	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
$y = \text{sen } 4x$					
$y = \text{sen } \frac{1}{3}x$					

tabla III

(g) Comparar los valores obtenidos en la tabla III con los valores de la tabla I, para completar:

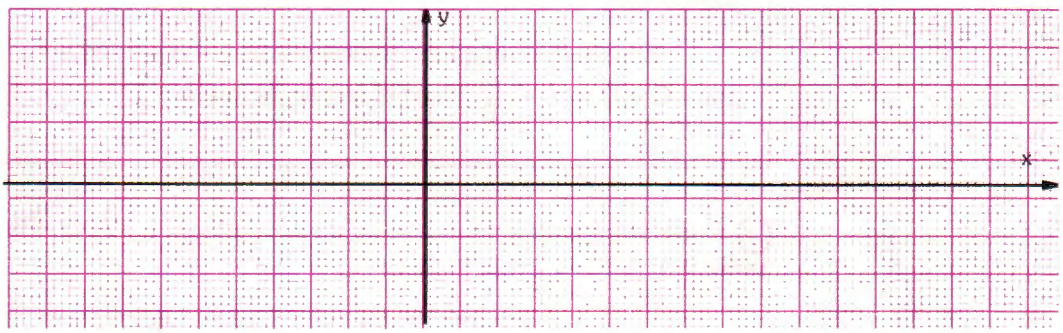
Si $B > 0$ $(B \varepsilon R)$ y T es el período de $y = \text{sen } Bx$, entonces:

$$T = \frac{2\pi}{\ldots}$$

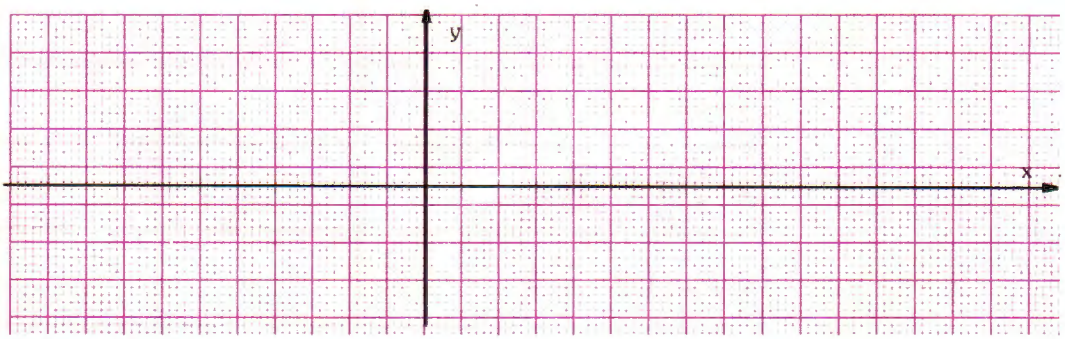
Al parámetro B se lo llama PULSACIÓN.

(h) Graficar las siguientes funciones y luego completar la tabla IV.

$h_1)$ $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



$h_2)$ $y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$



	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
$y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$					
$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$					

tabla IV

(i) Comparar los valores obtenidos con los valores de la tabla I para completar:

Si y = sen (x + C) entonces - C indica .....

.....

Al parámetro C se lo llama ÁNGULO DE FASE.

Observación: para hallar el ángulo de fase, basta con calcular el valor que anula el argumento.

Si se trata de una función de la forma y = A sen (Bx + C), donde $B \neq 1$, entonces $Bx + C = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{C}{B}$, luego el ángulo de fase es $-\frac{C}{B}$.

(j) Dadas las siguientes funciones de la forma general y = A sen (Bx + C) reconocer amplitud, pulsación, período y ángulo de fase:

	Amplitud (A)	Pulsación (B)	Período (T)	Ángulo de fase $\left(-\frac{C}{B}\right)$
$y = 2 \text{ sen } x$				
$y = \text{sen}\frac{x}{2}$				
$y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$				
$y = \text{sen } 2(x + \pi)$				
$y = \frac{2}{3}\text{ sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$				
$y = \text{sen}\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$				

Observación: El trazado de la gráfica aproximada de una función del tipo $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ es casi inmediato a partir de la lectura de los parámetros. Por ejemplo, si se trata de representar la función $y = 5 \operatorname{sen}(2x - \pi)$ para los x tales que $-\pi \leq x \leq 2\pi$, procedemos de la siguiente manera:

1°) $A = 5$ indica que la gráfica está comprendida en la región limitada por las rectas $y = 5$ e $y = -5$, teniendo en común con estas rectas los puntos de la curva de ordenada máxima y mínima respectivamente (fig. 4).

2°) El ángulo de fase es $x = \frac{\pi}{2}$ pues $2x - \pi = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$

luego, una onda de la gráfica se inicia en $x_1 = \frac{\pi}{2}$.

3°) Como $B = 2$ y el período de la función es $T = \frac{2\pi}{B}$

resulta: $T = \pi$

por lo tanto, si llamamos x_2 al punto del eje X donde termina la onda, deberá ser la distancia entre x_1 y x_2 igual a π de donde resulta:

$$x_2 = x_1 + \pi \qquad \text{es decir} \qquad x_2 = \frac{3}{2}\pi \qquad \text{(fig. 5).}$$

4°) Dibujamos la onda completa de la gráfica que "arranca" en $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y finaliza en $x_2 = \frac{3\pi}{2}$ cortando al eje X en $x_3 = \pi$ que es el punto medio entre x_1 y x_2 (fig. 6).

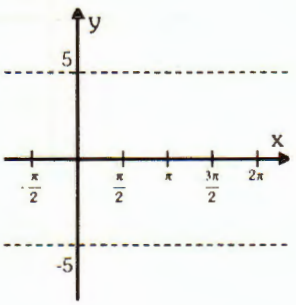


fig 4

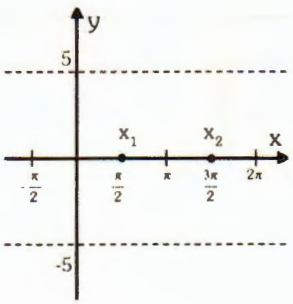


fig. 5

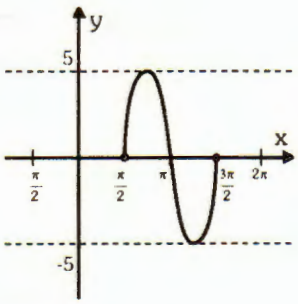
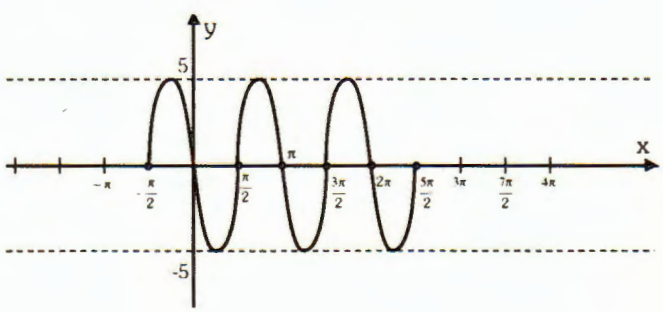


fig. 6

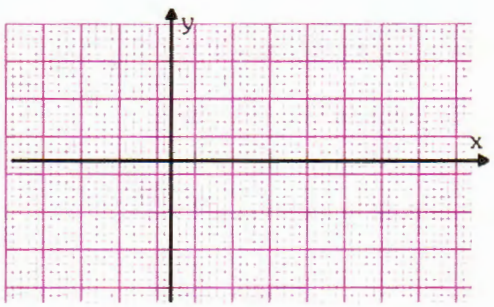
5°) Para continuar la gráfica hasta 2π debemos agregar a derecha media onda como la dibujada entre $\frac{\pi}{2}$ y π, mientras que para continuarla a izquierda hasta $-\frac{\pi}{2}$ habrá que añadir una onda completa, dado que la distancia entre esos dos puntos es π (fig. 7).



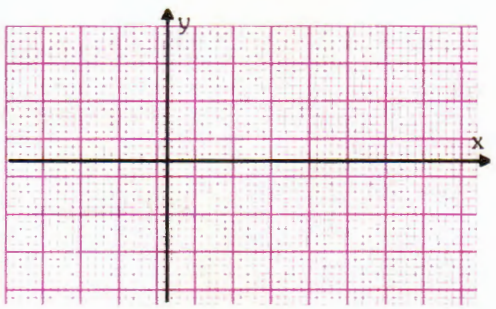
(k) Trazar la gráfica aproximada de las funciones del ejercicio (J) para

x tal que $-\pi \leq x \leq 2\pi$

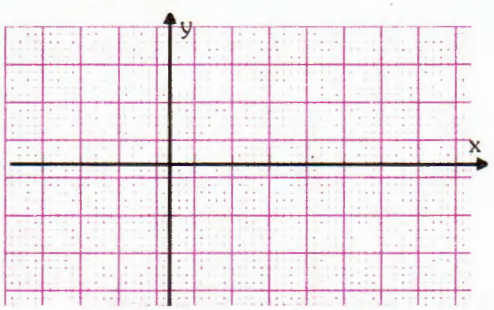
$y = 2 \operatorname{sen} x$



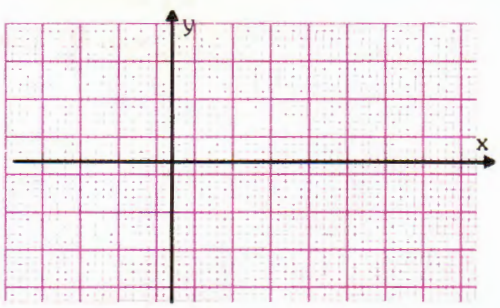
$y = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$



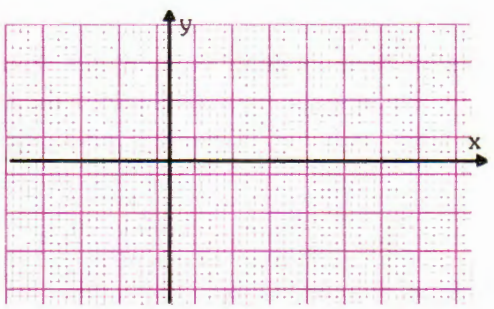
$y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



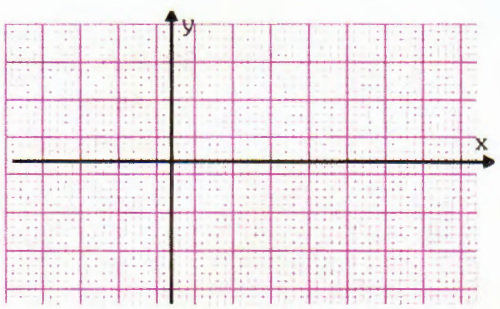
$y = \operatorname{sen} 2(x + \pi)$



$y = \frac{2}{3} \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$



$y = \operatorname{sen}\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$



3.2 FUNCIÓN COSENO

Con el mismo procedimiento utilizado para trazar la gráfica de y = sen x representamos y= cos x.

Teniendo en cuenta que en la circunferencia de radio 1 es:

cos x = abscisa de P (fig. 8)

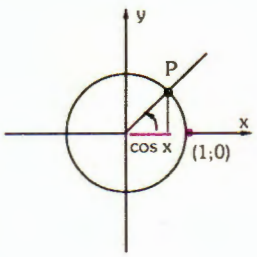


fig. 8

bastará con determinar sobre la circunferencia el punto P correspondiente a cada ángulo y luego transportar el valor de la abscisa de P sobre el eje Y. De esta manera se obtiene el valor de cos x para cada x representado en el eje X (fig. 9).

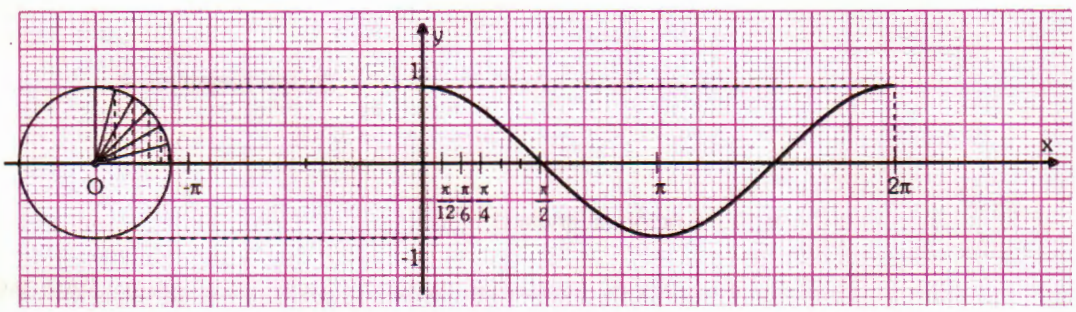


fig. 9

Al trozo de curva representado entre $x_1 = 0$ y $x_2 = 2\pi$, lo consideraremos una onda completa de y = cos x. Si continuamos la gráfica a derecha y a izquierda observaremos la sucesiva aparición de estas ondas.

Para Aplicar (B)

ⓐ Continuar la gráfica de y = cos x hacia la derecha hasta x = 3 π y hacia la zquierda hasta x = - π

ⓑ Observando la fig. 9 y teniendo en cuenta la definición y propiedades de y = cos x, completar:

b_1) Dom cos = { ..... }

b_2) Cod cos = { ..... }

b_3) La función coseno no es inyectiva porque .....

.....

Conclusión: .....

b_4) El valor máximo de la función es .....y se alcanza para x = ...

b_5) El valor mínimo de la función es .....y se alcanza para x = ...

b_6) Los valores de la función entre 0 y 2π son positivos si .....

.....

b_7) Los valores de la función entre 0 y 2π son negativos si .....

.....

b_8) La función se anula si. .....

b_9) y = cos x es una función (tachar lo que no corresponda) PAR, IMPAR porque .....

b_{10}) El período de la función coseno es.....

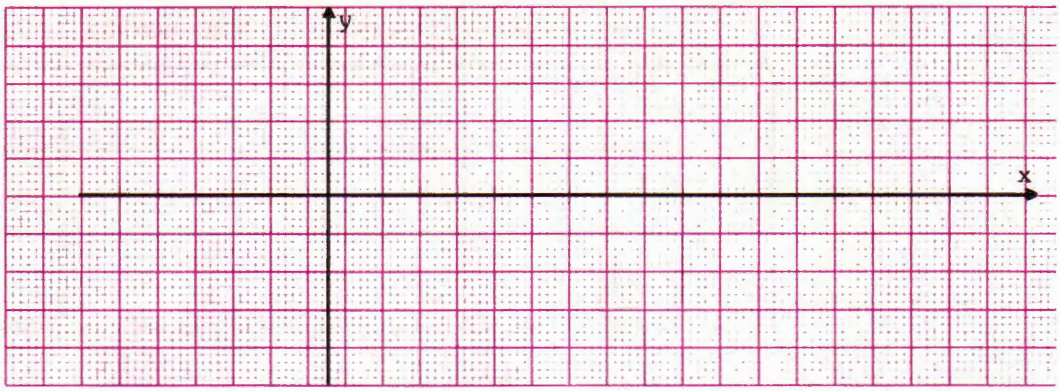
(c) Completar la siguiente tabla:

	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
y = cos x					

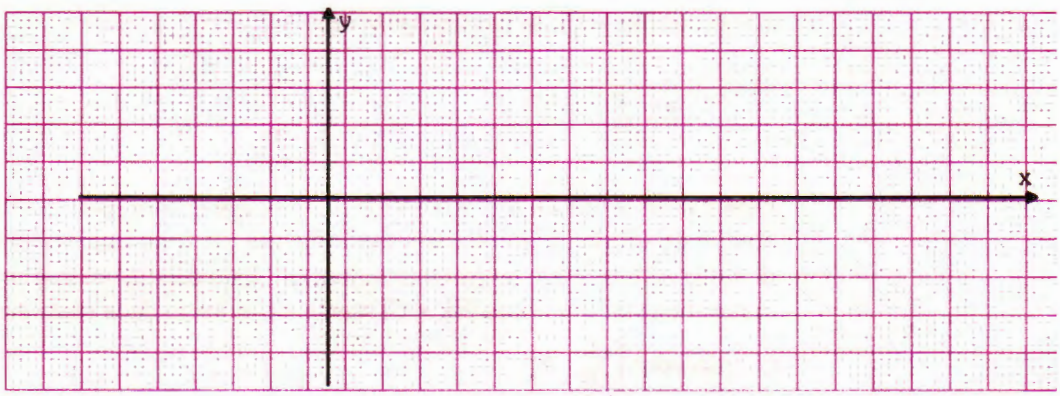
tabla V

(d) Graficar las siguientes funciones utilizando la circunferencia auxiliar o la tabla del ejercicio 4 de la Guía II.

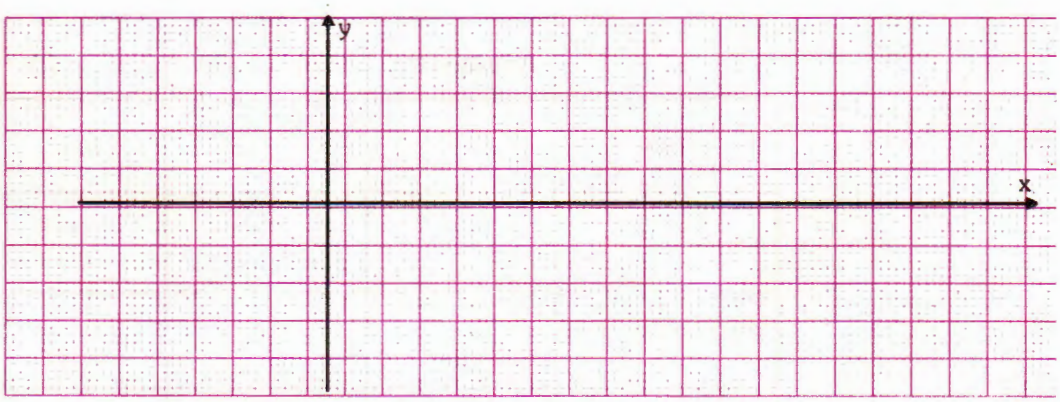
d_1) $y = 2 \cos x$



d_2) $y = \cos \frac{1}{2} x$



d_3) $y = \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)$



ⓔ Completar la tabla VI

	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
$y = 2\cos x$					
$y = \cos \frac{1}{2} x$					
$y = \cos \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$					

tabla VI

Observación: Las funciones representadas son funciones de la forma $y = A \cos (Bx + C)$ donde A, B y $-\frac{C}{B}$ indican amplitud, pulsación y ángulo de fase respectivamente. El período T de $y = A \cos (Bx + C)$, se calcula haciendo:

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

Observando la gráfica de $y = \cos x$ (fig. 9) se ve que el inicio de lo que llamamos una onda, cuya abscisa está dada por el valor del ángulo de fase, no tiene lugar sobre el eje X sino en un punto de ordenada igual a la amplitud de la función. Esto deberá tenerse presente al hacer la gráfica aproximada de $y = A \cos (Bx + C)$ marcando el inicio de la onda en el punto de coordenadas $\left(-\frac{C}{B} ; A\right)$.

ⓔ Reconocer amplitud, pulsación, período y ángulo de fase.

	Amplitud (A)	Pulsación (B)	Periodo (T)	Ángulo de fase $\left(-\frac{C}{B}\right)$
$y = \frac{1}{2} \cos x$				
$y = \cos \frac{x}{3}$				
$y = \text{sen}\,(x - \pi)$				
$y = 0{,}5 \cos 2x$				
$y = \cos \left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$				
$y = 4 \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$				

Observación: Para construir la gráfica de una función del tipo y = A cos (Bx + C) a partir de la lectura de los parámetros, procedemos en forma análoga a la hecha para y = A sen (Bx + C).

Ejemplo: Trazar una onda de $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Seguimos los siguientes pasos:

1° Determinar la franja del plano dentro de la cual se trazará la gráfica de la función (fig. 10).

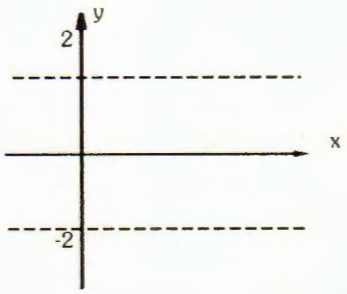


fig. 10

2° Ubicar el punto Q donde se inicia una onda:
Como

$$x - \frac{\pi}{6} = 0 \quad \text{si } x = \frac{\pi}{6}$$

resulta

$$x_1 = \frac{\pi}{6} \quad y \qquad Q = \left(\frac{\pi}{6} ; 2\right)$$ (fig 11)

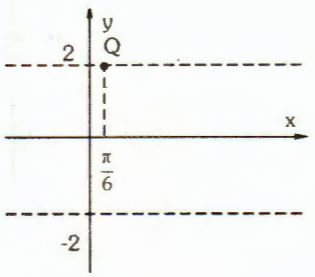


fig. 11

3° Ubicar el punto R donde termina la onda iniciada en Q:

Como

$$B = 1 \text{ y el período es } T = \frac{2\pi}{B}$$

entonces es

$$T = 2\pi$$

luego

$$x_2 = x_1 + 2\pi = \frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{13\,\pi}{6}$$ (fig. 12).

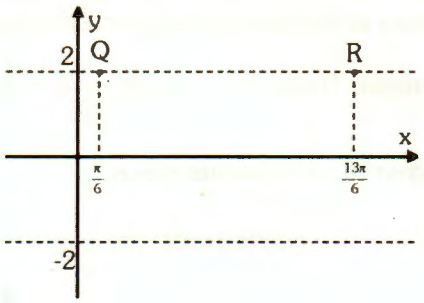


fig. 12

4° Determinar sobre el eje X los siguiente puntos:

$x_3 = \frac{7\pi}{6}$ (punto medio entre $x_1 = \frac{\pi}{6}$ y $x_2 = \frac{13\pi}{6}$)

En x_3 la función toma el valor mínimo.

$x_4 = \frac{2\pi}{3}$ (punto medio entre x_1 y x_3)

$x_5 = \frac{5\pi}{3}$ (punto medio entre x_3 y x_2)

x_4 y x_5 son las abscisas de los puntos donde la función corta al eje X (fig. 13).

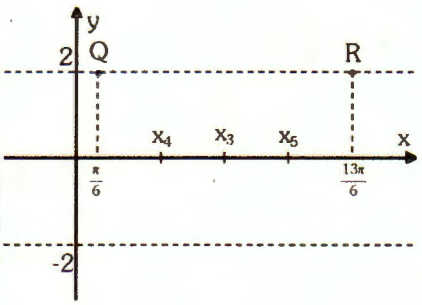


fig. 13

5° Trazar la onda que "arranca" en $x_1 = \frac{\pi}{6}$ y finaliza en $x_2 = \frac{13\pi}{6}$, atravesando al eje X en x_4 y en x_5 (fig. 14).

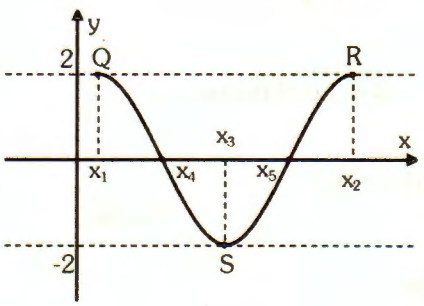
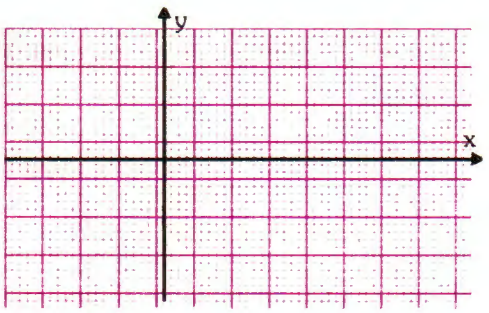


fig. 14

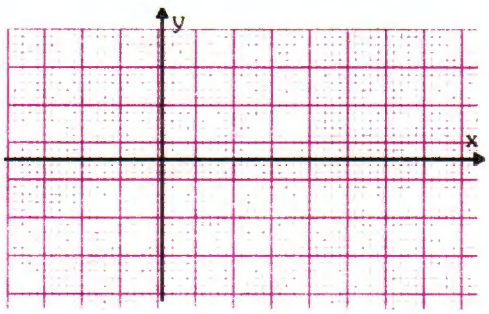
(g) Trazar una onda completa de cada una de las funciones del ejercicio (f)

$$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

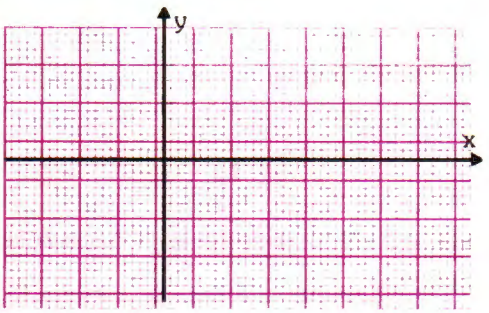
$y = \frac{1}{2} \cos x$



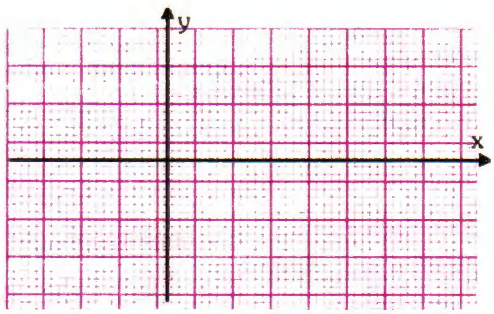
$y = \cos \frac{x}{3}$



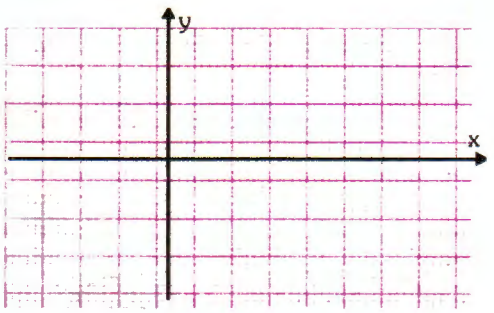
$y=\cos(x-\pi)$



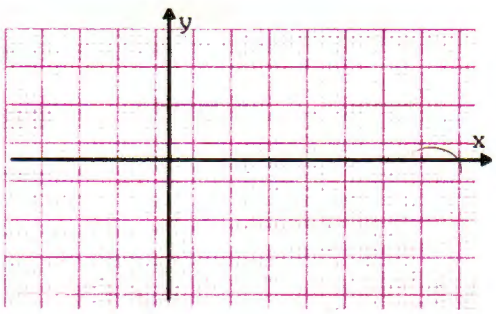
$y=0,5\cos 2x$



$y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$



$y = 4 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$



Observación: Comparando las gráficas de las funciones y = sen x e y = cos x (fig. 3 y fig. 9) se ve que una cualquiera de ellas puede obtenerse a partir de la otra corriendo el eje Y hacia la derecha o hacia la izquierda una longitud igual a $\frac{\pi}{2}$.

Es decir:

Si en la figura 3 corremos el eje Y hacia la derecha y lo ubicamos en $x = \frac{\pi}{2}$, se obtiene la gráfica de $y = \cos x$ mediante la misma curva. Esto se debe a que $\text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$.

Luego:

La gráfica de $y = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2})$ coincide con la gráfica de $y = \cos x$ (fig. 15), pues ambas funciones resultan iguales para todo valor de x.

$y = \text{sen } x$ $\qquad\qquad$ $y = \cos x = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{2})$

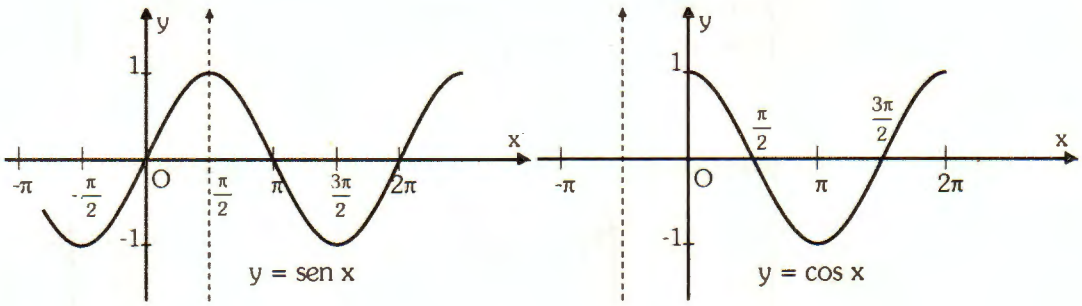


fig. 15

De la misma manera, si en la figura 9 corremos el eje Y hacia la izquierda y lo ubicamos en $x = -\frac{\pi}{2}$ se obtiene, mediante la misma curva, la gráfica de $y = \text{sen } x$ (fig. 16). Esto se debe a que $\cos\,(x - \frac{\pi}{2}) = \text{sen } x$.

Luego, coinciden las gráficas de las funciones $y = \cos\,(x - \frac{\pi}{2})$ e $y = \text{sen } x$, por ser ambas funciones iguales para todo valor de x.

$y = \cos x$ $\qquad\qquad$ $y = \text{sen } x = \cos\,(x - \frac{\pi}{2})$

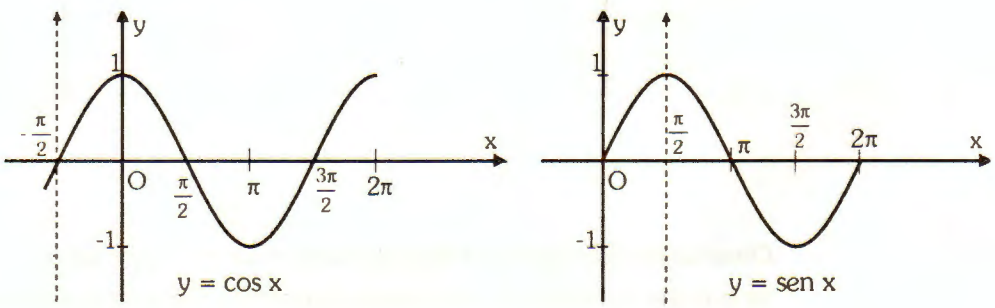


fig. 16

En general, toda función $y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$ puede expresarse como una función del tipo $y = A \cos(Bx + C)$. Las gráficas de estas funciones reciben el nombre de sinusoides.

Ejemplo 1:

$$y = \frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) \text{ puede expresarse como } y = \frac{1}{4} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

pues:

$$\frac{1}{4} \cos\left(3x + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4} \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ejemplo 2:

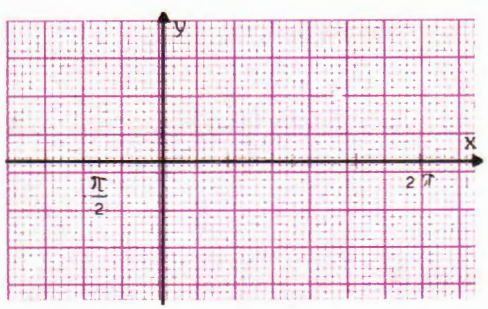
La gráfica aproximada de $y = 0{,}5 \cos(x - \pi)$ puede trazarse analizando los parámetros de $y = 0{,}5 \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$

pues $0{,}5 \cos(x - \pi) = 0{,}5 \operatorname{sen}(x - \pi + \frac{\pi}{2}) = 0{,}5 \operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$.

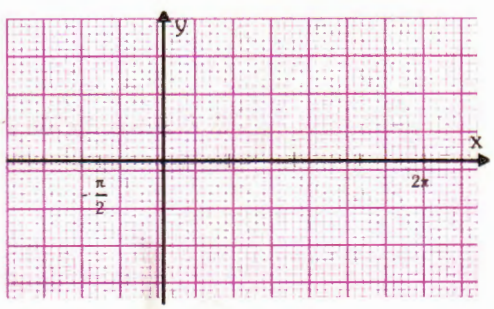
PARA EJERCITAR

1. Hacer la gráfica aproximada de cada una de las siguientes funciones para los valores de x comprendidos entre los puntos indicados.

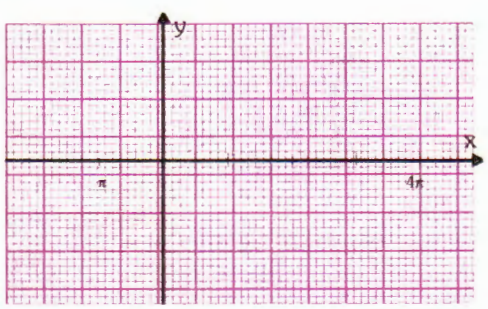
a) $y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x$



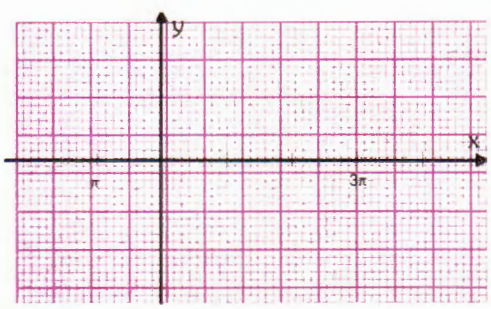
b) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{3})$



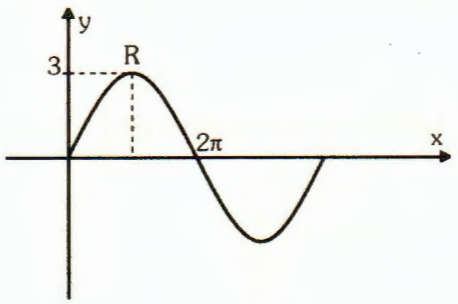
c) $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$



d) $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3(x - \frac{2\pi}{3})$

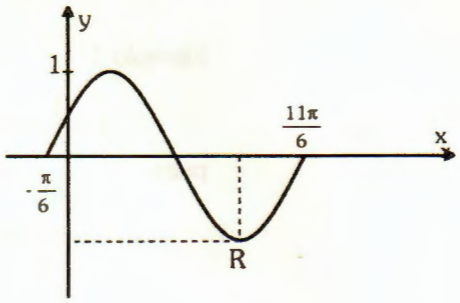


2. Completar:



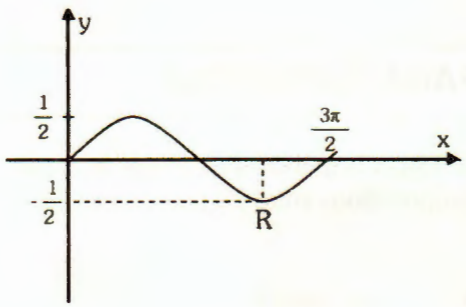
y = ...sen .....

abscisa de R: .....



y =.....sen .....

abscisa de R: .....

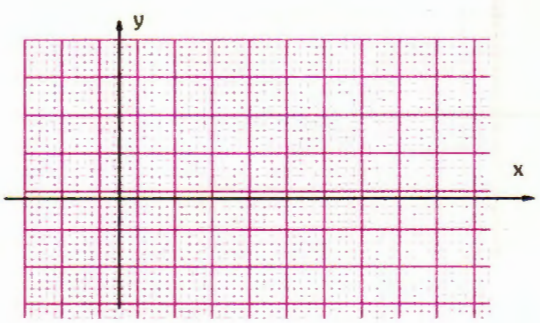


y= .....sen .....

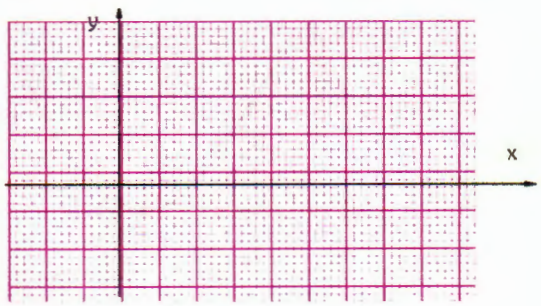
abscisa de R: .....

3. Dar la ecuación y gráfica de cada una de las funciones del tipo y = A sen (Bx + C) que cumplan las siguientes condiciones:

ⓐ
- Inicio de una onda: (0; 0)
- Valor máximo: 4
- Período: $\frac{8\pi}{3}$

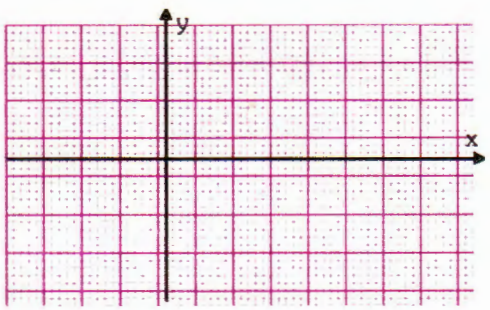


ⓑ
- Inicio de una onda: $(\frac{\pi}{4}; 0)$
- Valor mínimo: - 2
- Período: 2π

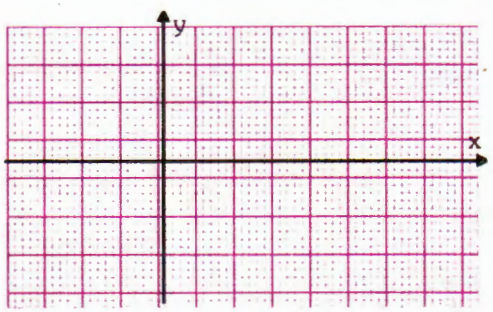


4. Hacer la gráfica aproximada de: $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi)$

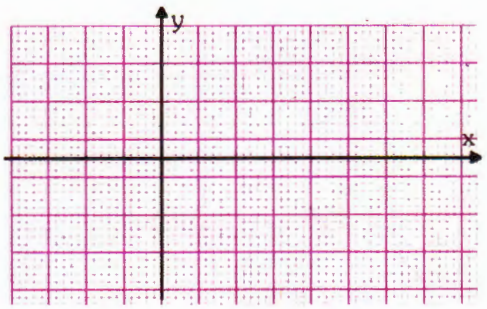
ⓐ $y = 3 \cos (x + \frac{5\pi}{6})$



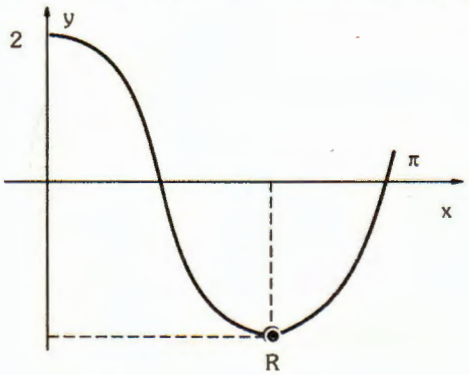
ⓑ $y = \cos 2 (x - \frac{5\pi}{9})$



ⓒ $y = \frac{1}{2} \cos 4x$

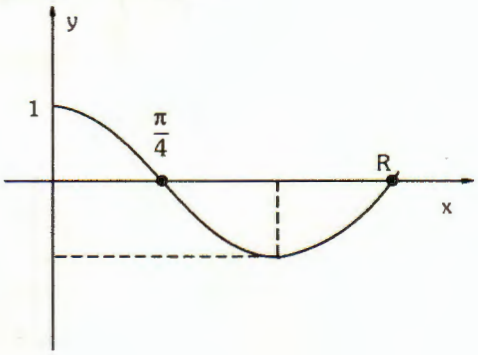


5. Dadas las siguientes funciones del tipo y = A cos (Bx + C), completar:



y = ...

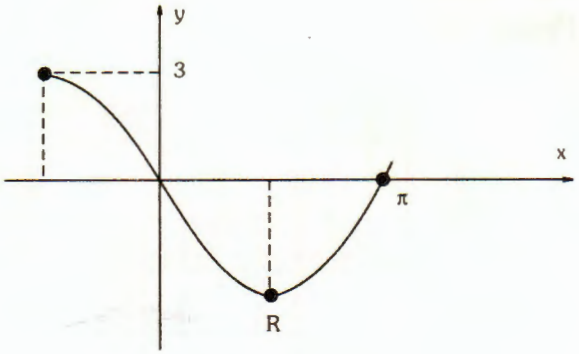
abscisa de R: .....



y = ...

abscisa de R: .....

ⓒ

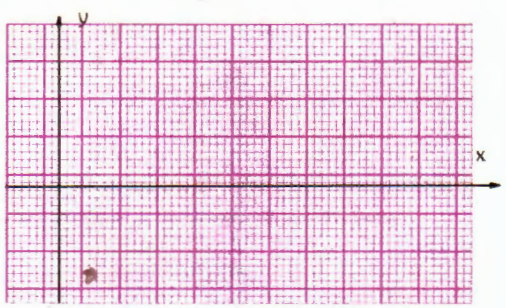


y= .....sen .....

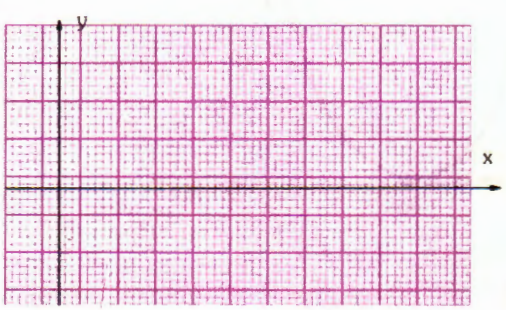
abscisa de R: .....

6. Dar la ecuación y la gráfica aproximada de las funciones del tipo y = A cos (Bx +. C), que cumplen las siguientes condiciones:

ⓐ { Inicio de una onda : $\left(0;\frac{5}{2}\right)$
Período: $\frac{3\pi}{2}$

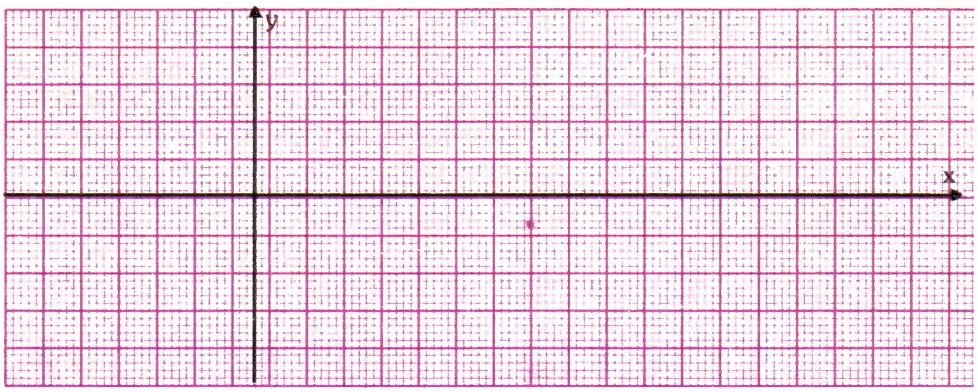


ⓑ { Inicio de una onda : (π ; 1)
Período: 4π



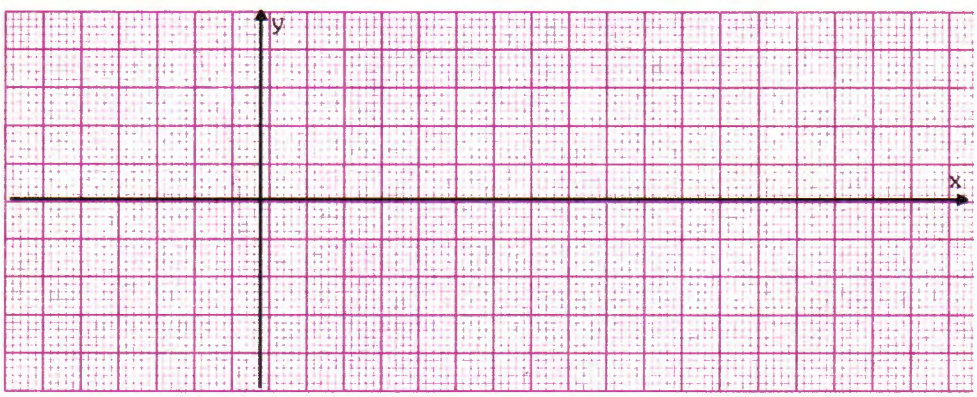
7. Graficar y completar, considerando Dom f = $\{ x \in R / 0 \leq x \leq 2\pi \}$

(a) $y = f(x) = 1 + \text{sen } x$



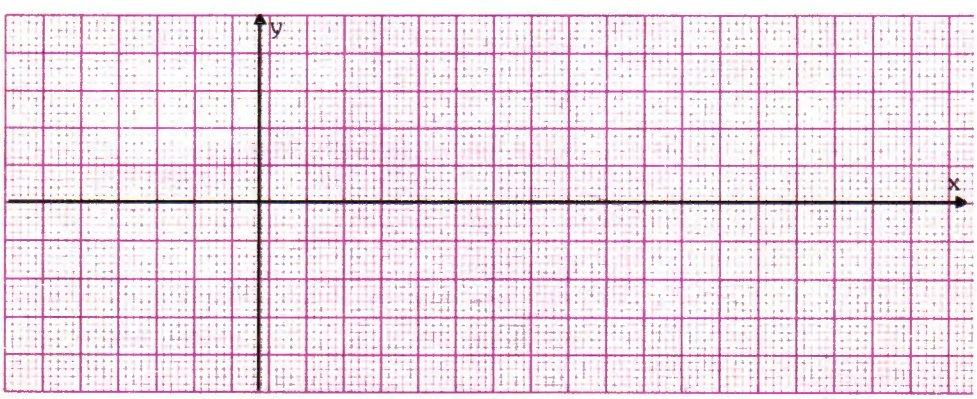
Cod f= {.....}

(b) $y = f(x) = -1 + \cos 2x$



Cod f= {.....}

(c) $y = f(x) = -2 + \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$



Cod f= {.....}

Función tangente

Teniendo en cuenta lo demostrado (Ejercicio 5 de la Guía II) y siguiendo el mismo procedimiento utilizado en los casos anteriores graficamos y = tg x:

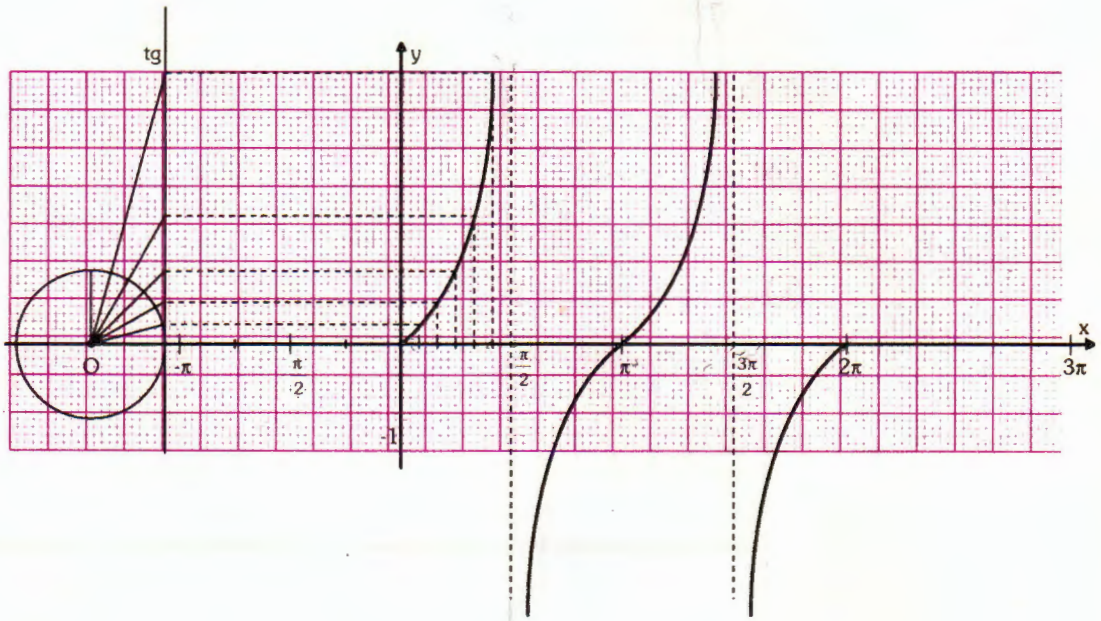


fig. 17

Para aplicar ©

ⓐ Completar la gráfica de la función y = tg x para valores de x comprendidos entre - π y 3π .

ⓑ Observando la gráfica de la función y teniendo en cuenta su definición y propiedades, completar:

b_1) Dom tg = { .....}

b_2) Cod tg = { .....}

b_3) La función tangente no es inyectiva .....

.....

Conclusión: .....

b_4) La función ..... valor máximo..... valor mínimo.

b_5) Los valores de la función, entre 0 y 2π, son positivos si

..... < x < ..... o ..... < x <. .....

b_6) Los valores de la función, entre 0 y 2π son negativos si

..... < x < ..... o ..... < x < .....

b_7) La función se anula si x = ...

b_8) y = tg x es una función PAR IMPAR (tachar lo que no corresponda)

porque .....

b_9) El período de y = tg x es .....

(c) Completar la siguiente tabla:

	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
y = tg x					

tabla VII

Función cotangente

Teniendo en cuenta lo demostrado en la Guía II (ejercicio 7), graficamos y = cotg x (fig. 18).

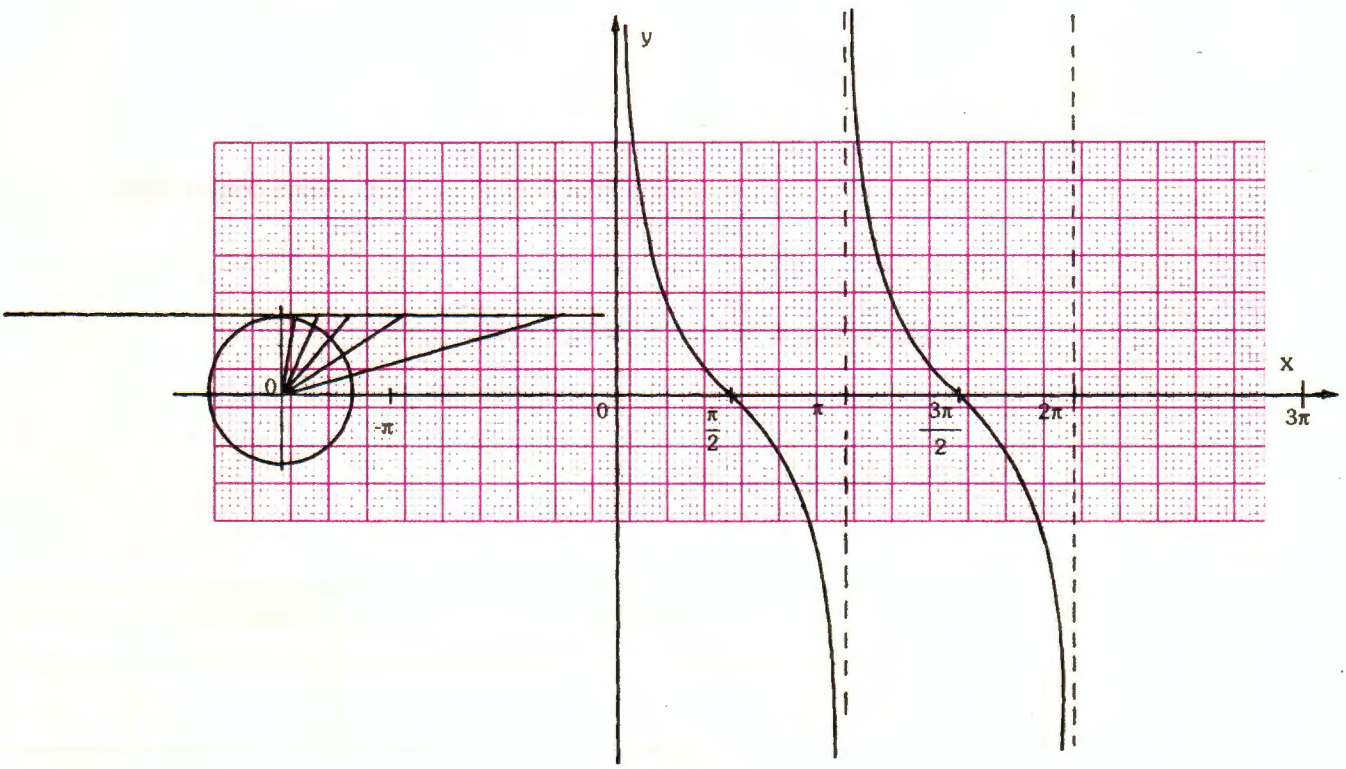


fig. 18

Para aplicar (D)

(a) Completar la gráfica de y = cotg x, para valores de x comprendidos entre $-\pi$ y 3π.

(b) Observando la gráfica de la función y teniendo en cuenta su definición y propiedades, completar:

b_1) Dom cotg = { ..... }

b_2) Cod cotg = { ..... }

b_3) La función cotangente no es inyectiva .....

.....

Conclusión: .....

b_4) La función .....valor máximo .....valor mínimo.

b_5) Los valores de la función, entre 0 y 2π, son positivos si

.....<x< .....o .....< x < .....

b_6) Los valores de la función, entre 0 y 2π son negativos si

.....<x< .....o .....< x < .....

b_7) La función se anula si x = ...

b_8) y = cotg x es una función PAR IMPAR (tachar lo que no corresponda)

porque .....

b_9) El período de la función cotangente es .....

(c) Completar la tabla VIII:

	Dominio	Codominio	Valor máximo	Valor mínimo	Período
y = cotg x					

tabla VIII

Funciones: secante y cosecante

Remitiéndonos a lo demostrado en el ejercicio 9 de la Guía II, graficamos :

ⓐ $y = \sec x$

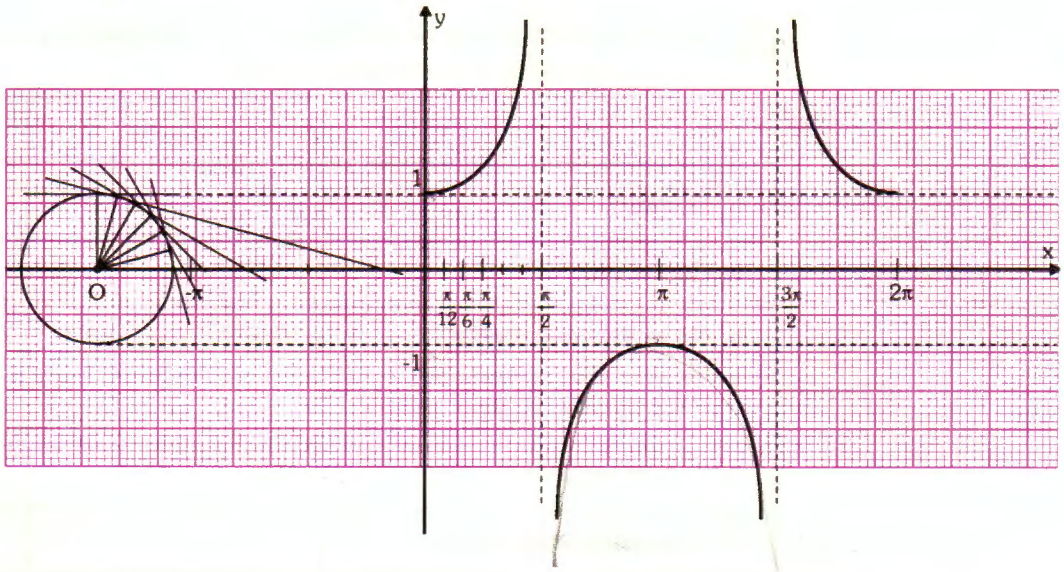


fig. 19

ⓑ $y = \operatorname{cosec} x$

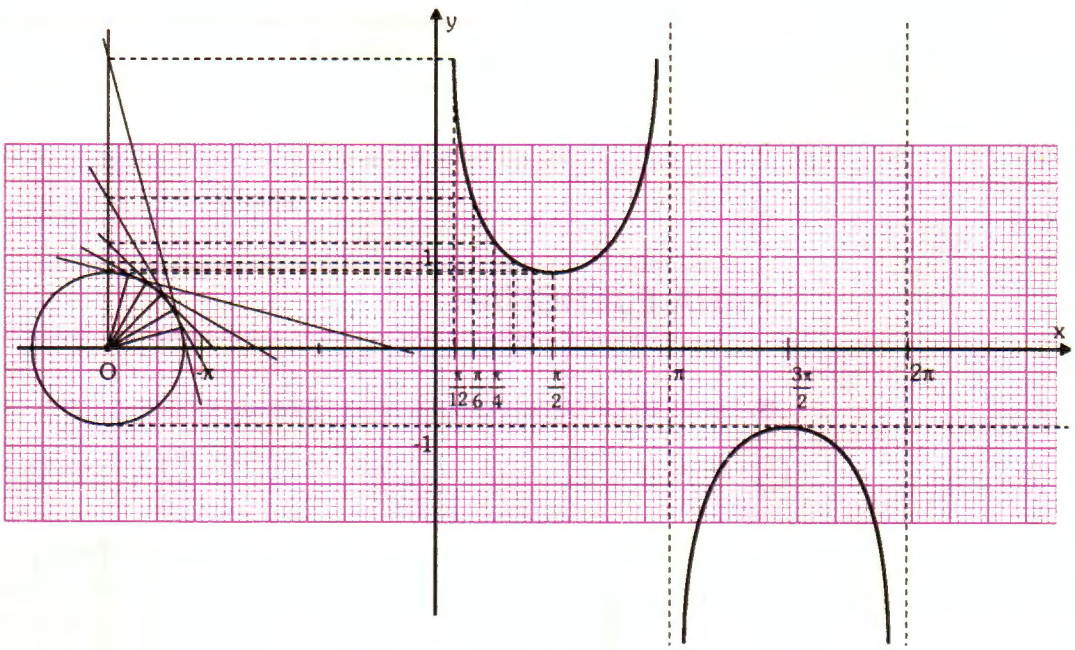


fig. 20

Para aplicar (E)

(a) Completar las gráficas de las figuras 19 y 20 para valores de x comprendidos entre $-\pi$ y 3π.

(b) Observando las gráficas de las figuras 19 y 20 y teniendo en cuenta las definiciones de las funciones y sus propiedades, completar:

	$y = \sec x$	$y = \operatorname{cosec} x$
b_1 Dominio		
b_2 Codominio		
b_3 No es inyectiva porque		
b_4 Valor máximo b_5 Valor mínimo		
b_6 Es positiva entre 0 y 2π		
b_7 Es negativa entre 0 y 2π		
b_8 Se anula si		
b_9 Es PAR IMPAR porque		

(c) Completar la tabla IX.

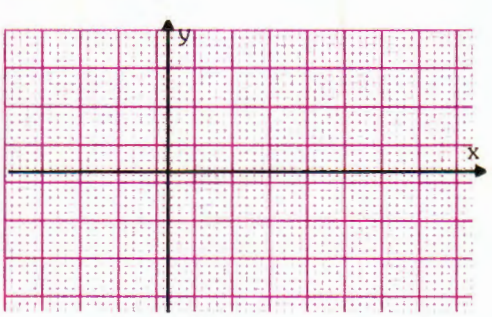
	Período
$y = \sec x$	
$y = \operatorname{cosec} x$	

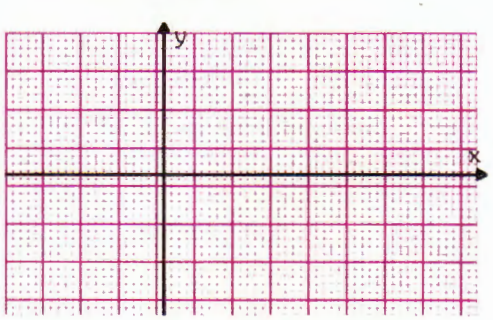
tabla IX

PARA EJERCITAR

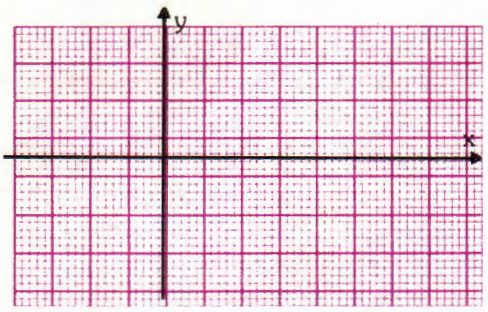
8. Hacer la gráfica aproximada de las siguientes funciones: $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi\right)$

(a) $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$ (b) $y = \operatorname{cotg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

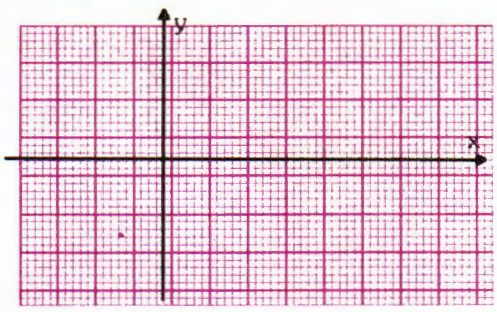




ⓒ $y = \sec\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

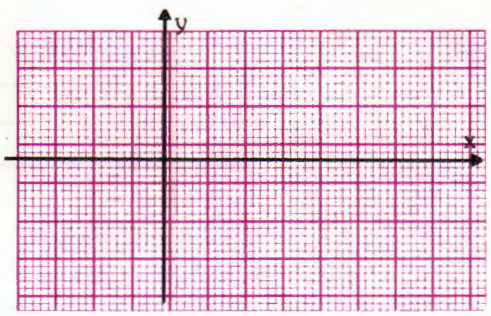


ⓓ $y = \operatorname{cosec}(x - \pi)$

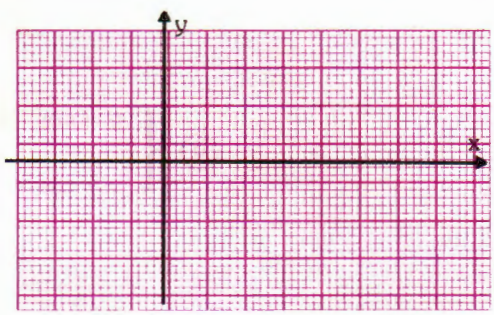


9. Graficar: $(0 \leq x \leq 2\pi)$

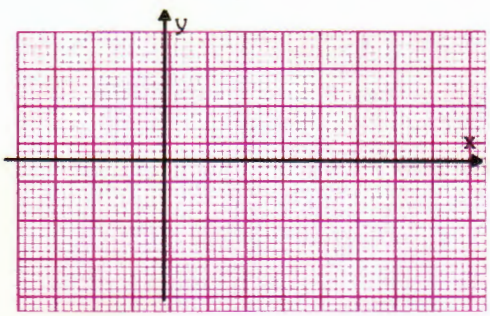
ⓐ $y = 2 + \operatorname{tg} x$



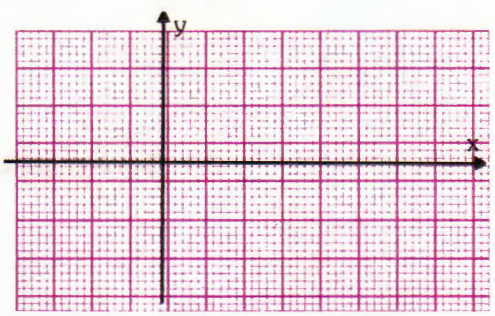
ⓑ $y = \operatorname{cosec} x + 1$



ⓒ $y = \operatorname{cotg} x - 3$



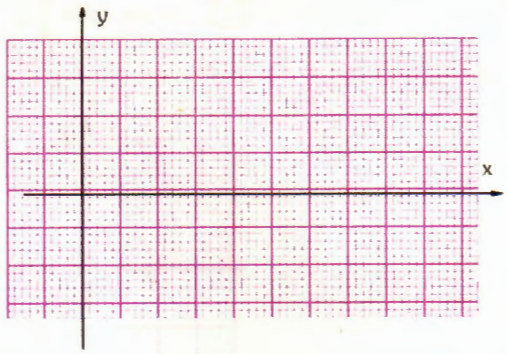
ⓓ $y = \frac{1}{2} + \sec x$



10. Resolver gráfica y analíticamente para $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

Sug.: Dibujar las dos curvas en un mismo gráfico.

ⓐ $\begin{cases} y = \text{sen } x \\ y = \cos x \end{cases}$

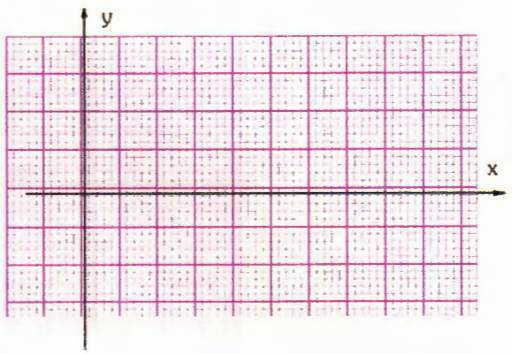


.....

.....

.....

ⓑ $\begin{cases} y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \\ y = \cos x \end{cases}$



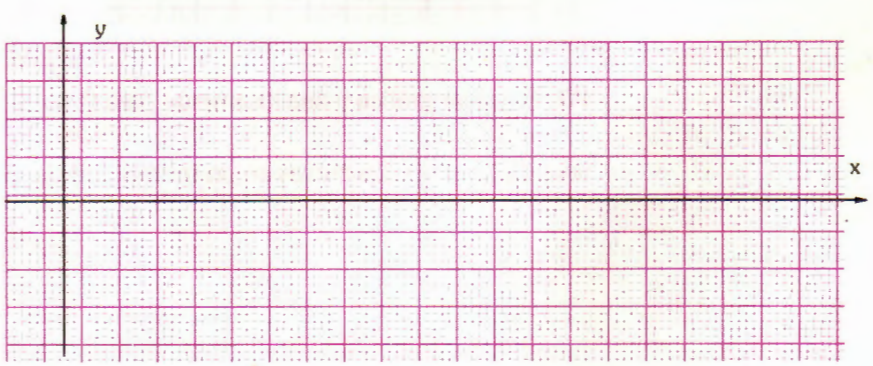
.....

.....

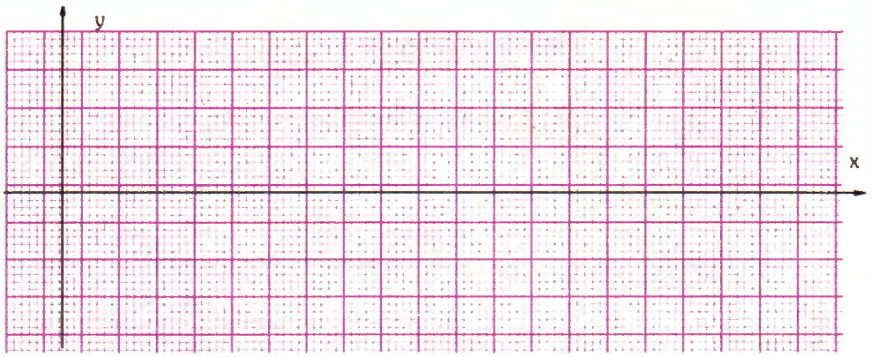
.....

11. Resolver gráficamente para $0 \leq x \leq \pi$

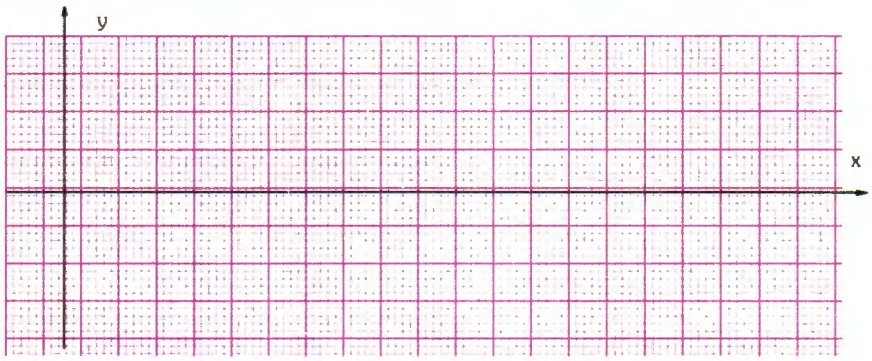
ⓒ $\begin{cases} y = \cos 2x \\ y = \text{sen } x \end{cases}$



ⓑ $\begin{cases} y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \\ y = \cos \frac{1}{2} x \end{cases}$



ⓒ $\begin{cases} y = 2 \text{ sen } 3x \\ y = \text{sen } x \end{cases}$



3.4 FUNCIONES CIRCULARES INVERSAS

Arco seno

Dados dos conjuntos A y B y una función f de A en B ($f : A \to B$) su inversa $f^{-1}: B \to A$ existe sí y solo sí f es biyectiva.

La función seno no es biyectiva. pero observando su gráfica se ve que si "reducimos" el dominio a

$$A = \{ x \in R / -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \}$$

y tomamos

$$B = \{ x \in R / -1 \leq x \leq 1 \}$$

podemos definir sen: $A \to B$, que sí es biyectiva.

Para esta función, así definida, existe función inversa y se la denomina arco seno:

$$\text{sen}^{-1} = \text{arc sen}$$

Luego, arc sen: $B \to A$ es la función que a cada número real x perteneciente a B, hace corresponder un número real y del conjunto A de manera tal que:

$$y = \text{arc sen } x$$

es decir, y es el ángulo cuyo seno es x.

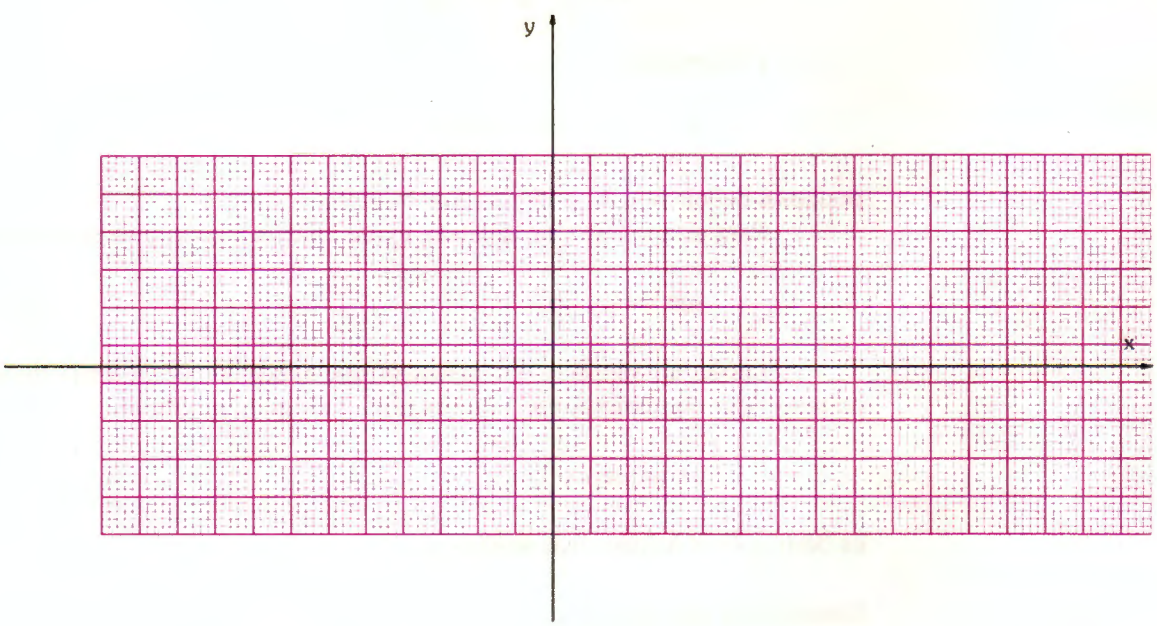
Ejemplo: arc sen $\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

Para aplicar (F)

(a) Completar la siguiente tabla:

x	y = arc sen x
0	
$\frac{1}{2}$	
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
-1	

(b) Utilizando la tabla del ejercicio anterior, graficar y = arc sen x.



Arco coseno

Tomando:

$$A = \{ x \varepsilon R / 0 \leq x \leq \pi \}$$

$$B = \{x \varepsilon R / -1 \leq x \leq 1 \}$$

se define:

$$\cos^{-1} = \text{arc cos}$$

$$\text{arc cos}: B \rightarrow A$$

Esta función hace corresponder a cada $x \varepsilon B$ un $y \varepsilon A$ tal que:

$$y = \text{arc cos } x$$

es decir, y es el ángulo cuyo coseno es x.

Ejemplo: $\text{arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$

Arco tangente

Tomando:

$$A = \{ x \varepsilon R / -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \}$$

$$B = R$$

se define:

$$\text{tg}^{-1} = \text{arc tg}$$

$$\text{arc tg} : B \rightarrow A$$

esta función hace corresponder a cada $x \varepsilon B$ un $y \varepsilon A$ tal que:

$$y = \text{arc tg } x$$

es decir, y es el ángulo cuya tangente es x.

Ejemplo: $\text{arc tg } \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

Para aplicar (6)

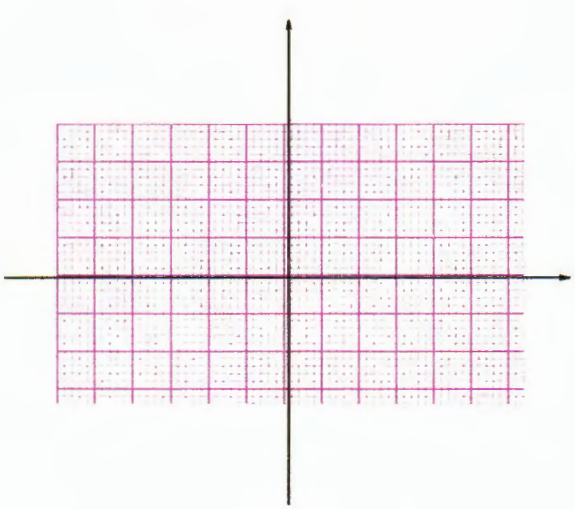
(a) Completar las siguientes tablas:

x	y = arc cos x
0	
$\frac{1}{2}$	
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$-\frac{1}{2}$	
1	
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	
-1	

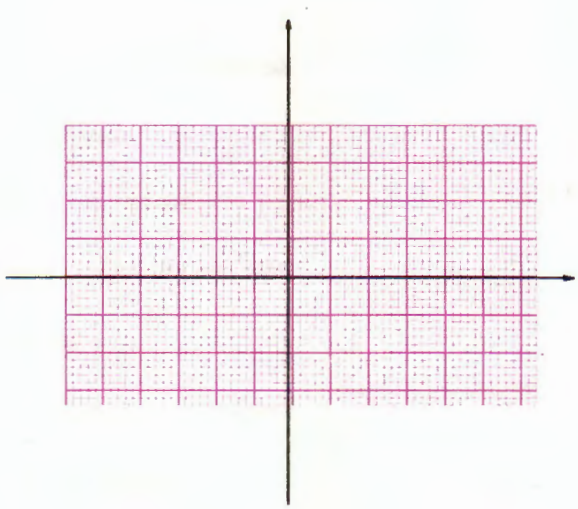
x	y =arc tg x
0	
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
1	
$-\sqrt{3}$	
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	
- 1	
$\sqrt{3}$	

(b) Graficar utilizando las tablas del ejercicio anterior:

y=arc cos x



y=arc tg x



PARA EJERCITAR

12. Calcular

ⓐ $\text{sen}\left[\text{arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] =$ .....

ⓑ $\text{sen}\left[\text{arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] =$ .....

ⓒ $\cos\left[\text{arc tg}\left(-\sqrt{3}\right)\right] =$ .....

ⓓ $\text{seno}\left[\text{arc cos}\left(-1\right)\right] =$ .....

ⓔ $\text{arc tg}\left(\text{sen}\,\frac{\pi}{2}\right) =$ .....

13. Responder V o F. Justificar.

ⓐ $\text{arc cos}\,\frac{1}{2} + \text{arc sen}\,\frac{1}{2} = \text{arc sen}\,1$ .....

.....

ⓑ $\text{sen}\left(\text{arc cos}\,\frac{1}{2} + \text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left[2\left(\text{arc cos}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{arc sen}\,\frac{1}{2}\right)\right] = 0$ .....

.....

ⓒ $\text{sen}\left(\text{arc cos}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \cos\left(\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$ .....

.....

ⓓ $\text{sen}\left[\text{arc tg}\left(-1\right)\right] + \cos\left[\text{arc tg}\left(-1\right)\right] = 0$ .....

.....

14. Calcular el valor de x

ⓐ $x = \dfrac{\text{arc sen}\,\frac{1}{2} + \text{arc tg}\,\sqrt{3}}{\text{arc sen}\,\frac{\sqrt{2}}{2}}$

.....

.....

(b) $x = \dfrac{\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos(-1)}{\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)}$

.....

.....

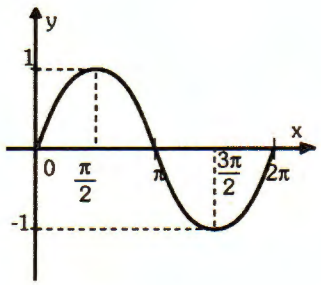
(c) $x.\arccos(-1) + x = \arccos\left[\operatorname{tg} -\frac{5\pi}{4}\right] + \operatorname{sen}(\arccos 0)$ .....

.....

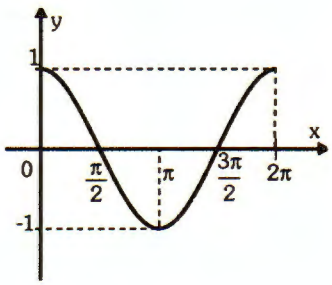
.....

Para recordar

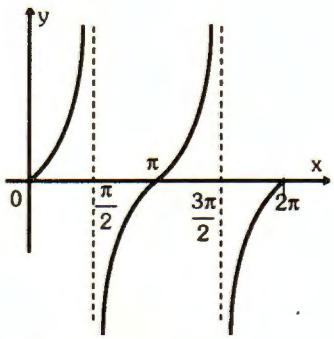
$y = \operatorname{sen} x$



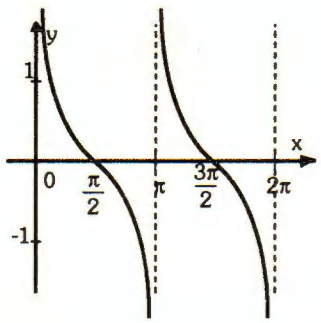
$y = \cos x$



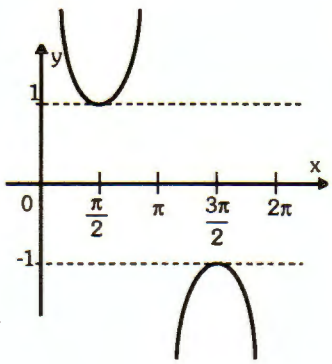
$y = \operatorname{tg} x$



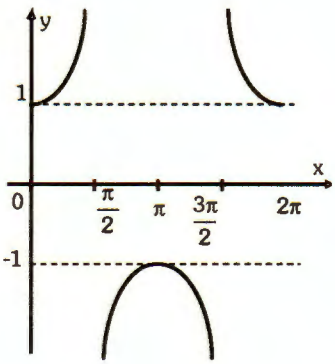
$y = \operatorname{cotg} x$



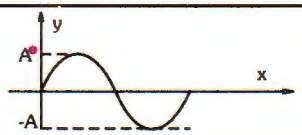
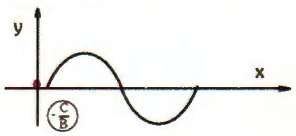
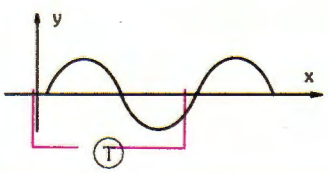
$y = \operatorname{cosec} x$



$y = \sec x$



$y = A \operatorname{sen}(Bx + C)$

A	Amplitud	
B	pulsación	
$-\frac{C}{B}$	Ángulo de fase	
$T = \frac{2\pi}{B}$	Período	

GUIA DE ESTUDIO IV

4.1 Vectores. Revisión

Para aplicar (A)

4.2 Fórmulas de adición

Para aplicar (B)
Para ejercitar (Ejercicios n° 1 al 32)

4.3 Números complejos

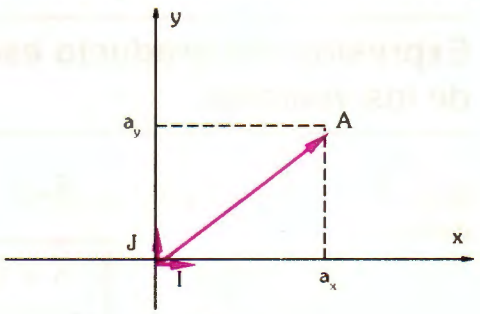
Para aplicar (C, D, E y F)
Para ejercitar (Ejercicios n° 33 al 37)

Para recordar

4.1 VECTORES. REVISIÓN

Consideremos en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares, de origen 0 y ejes X, Y.

Llamaremos V_0 al conjunto formado por los vectores del plano con origen en 0 e indicaremos con $\vec{A}$ al elemento perteneciente a V_0 con extremo en el punto A (fig. 1).



(fig. 1)

En la figura 1 se han ubicado los versores (vectores de módulo 1) I, J, sobre los ejes X e Y respectivamente.

I con extremo en (1 ; 0)

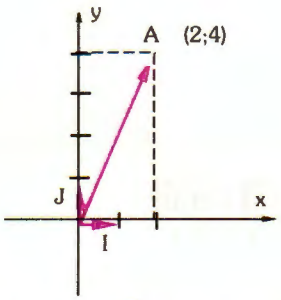
J con extremo en (0 ; 1)

Si $\vec{A} \varepsilon V_0$ y tiene componentes $(a_x; a_y)$, entonces $\vec{A}$ puede escribirse como:

$$\vec{A} = a_x I + a_y J$$

Ejemplo:

$$\vec{A} = 2 I + 4 J$$



Observemos que las componentes del vector $\vec{A}$ coinciden con las coordenadas del punto A.

Luego, el módulo de $\vec{A}$ puede calcularse en función de las coordenadas de su extremo.

Es decir:

$$|\vec{A}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Producto escalar. Definición

Dados dos vectores $\vec{A}$, $\vec{B}$ pertenecientes a V_0, llamamos producto escalar de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ $(\vec{A} \times \vec{B})$ al número real obtenido como producto de los módulos de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ por el coseno del ángulo formado por los dos vectores.

Es decir:

Si $\vec{A}$, $\vec{B} \varepsilon V_0$

entonces:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \, |\vec{B}| \cos \alpha ,$$

donde α es el ángulo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$

Como consecuencia inmediata de la definición resulta que:

> Dos vectores son perpendiculares sí y solo si su producto escalar es igual a cero.

Expresión del producto escalar mediante las componentes de los vectores

Si $\vec{A}$, $\vec{B}$ ε V_0, $\vec{A} = a_x I + a_y J$ y $\vec{B} = b_x I + b_y J$
entonces:

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y$$

Para aplicar (A)

(a) Calcular $\vec{A} \times \vec{B}$ siendo:

a_1) $\vec{A} = 2I + 4J$

$|\vec{B}| = 5$

ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = 60°$

.....

.....

.....

a_2) $2|\vec{A}| = 3|\vec{B}|$

$\vec{B} = 3I - 3J$

$\vec{A}$ y $\vec{B}$ son colineales

.....

.....

.....

a_3) $|\vec{A}| = |\vec{B}| = \sqrt{6}$

ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = 135°$

.....

.....

.....

a_4) $\vec{A} = 2I + 2J$

$\vec{B} = -2I + 2J$

.....

.....

(b) Calcular áng. $(\vec{A}, \vec{B})$, siendo:

$b_1)$ $\vec{A} = 3\,I - J$
$\vec{B} = 2\sqrt{5}\,I + \sqrt{5}\,J$

$b_2)$ $\vec{A} = 4\,I$
$\vec{B} = -2\,I - 2\sqrt{3}\,J$

$b_3)$ $\vec{A} = I + J$
$\vec{B} = -J$

(c) Determinar en cada uno de los siguientes casos las componentes de $\vec{B}$, sabiendo que:

$c_1)$ $\vec{A} = -2\,J$
$|\vec{B}| = 3$
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen sentidos opuestos.

$c_2)$ $|\vec{B}| = 7$
$\vec{A} = 3\,I + 4\,J$
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido.

$c_3)$ $\vec{A} = 2\,I - J$

$|\vec{B}| = 2$

$\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen igual dirección.

.....

.....

.....

(d) Dados $\vec{A} = 2\,I + 2\,J$ y $\vec{B} = m\,J$, hallar el valor de m para que resulte $\vec{A} \times \vec{B} = 5$.

.....

.....

(e) Dados $\vec{A}=I+3\,J$, y $\vec{B}=mI+2J$,hallar m tal que:

$e_1)$ $\vec{A}$ y $\vec{B}$ sean perpendiculares.

.....

.....

$e_2)$ $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tengan igual dirección.

.....

.....

(f) Dados $\vec{A} = 2\,I - J$ y $\vec{B} = I + m\,J$, hallar el valor de m para el cual se cumple:

$f_1)$ $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son perpendiculares.

.....

.....

$f_2)$ $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen igual dirección.

.....

.....

(g) Dados $\vec{A} = 3\,I + \sqrt{3}\,J$ y $\vec{B} = m\,I + \frac{1}{2}\,J$, hallar el valor de m para el cual:

$g_1)$ ang. $(\vec{A}\ ,\ \vec{B}) = \frac{2\pi}{3}$

.....

.....

$g_2)$ ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\pi}{6}$

.....

.....

(h) Determinar en cada uno de los siguientes casos las componentes de $\vec{B}$, sabiendo que:

$h_1)$ $\vec{A} = 2\,I - 2\sqrt{3}\,J$
$|\vec{B}| = 2$
ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\pi}{3}$

.....

.....

$h_2)$ $\vec{A} = I + 3\,J$
$|\vec{B}| = 1$
ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{3\pi}{4}$

.....

.....

.....

$h_3)$ $\vec{A} = I + \sqrt{3}\,J$
ang. $(\vec{A}, \vec{B}) = 150°$
$\vec{A} \times \vec{B} = -4\sqrt{3}$

.....

.....

.....

4.2 FÓRMULAS DE ADICIÓN

Cálculo de cos $(\alpha - \beta)$

Si A y B son dos puntos de la circunferencia C (O, 1) entonces para los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se cumple que:

$|\vec{A}| = |\vec{B}| = 1$ (1)

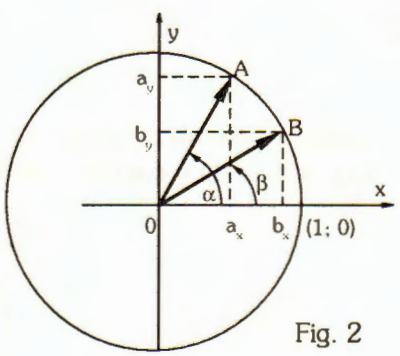


Fig. 2

Llamando α y β, a los ángulos que forman $\vec{A}$ y $\vec{B}$ respectivamente, con el sentido positivo del eje X.

$$\text{ang.}(\vec{A}, \vec{B}) = \alpha - \beta \quad (2)$$

luego, el producto escalar

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}|\ |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

puede escribirse, teniendo en cuenta (1) y (2), como:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \cos(\alpha - \beta)$$

pero siendo:

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_x\, b_x + a_y\, b_y$$

de las dos últimas igualdades resulta:

$$\cos(\alpha - \beta) = a_x\, b_x + a_y\, b_y$$

y como:

$$a_x = \cos\alpha,\ a_y = \operatorname{sen}\alpha,\ b_x = \cos\beta,\ b_y = \operatorname{sen}\beta$$

es

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$$

Para aplicar (B)

(a) Calcular cos 15°.
Sug.: tomar $\alpha = 45°$, $\beta = 30°$.

.....

.....

(b) Deducir la fórmula de $\cos(\alpha + \beta)$.
Sug.: $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$.

.....

.....

$$\cos(\alpha + \beta) =$$

(c) Calcular cos 75° =

.....

(d) Deducir la fórmula de $\operatorname{sen}(\alpha - \beta)$.
Sug.: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos[90° - (\alpha - \beta)] = \cos[(90° - \alpha) + \beta]$.

.....

.....

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$$

(e) Calcular sen 15°.

.....

(f) Deducir la fórmula de sen (α + ß).

.....

.....

sen (α + ß) =

(g) Calcular sen 75° =

.....

.....

PARA EJERCITAR

1. Calcular sen 105° y cos 105°.

.....

.....

2. Obtener cos (ß - α), sabiendo que sen $\alpha = \frac{3}{5}$, tg $\beta = \frac{4}{3}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$.

.....

.....

3. Deducir tg (α + ß) y tg (α - ß).

Sug. 1: $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$

Sug. 2: Dividir numerador y denominador por cos α cos ß.

.....

.....

tg (α + ß) =

tg (α - ß) =

4. Obtener:

a) tg (α + ß) si tg $\alpha = \sqrt{3}$, cos $\beta = \frac{1}{3}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

.....

b) tg $(\alpha - ß)$ si sen $\alpha = \frac{2}{3}$ cos $ß = \frac{2}{5}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$

5. Deducir la fórmula de cotg $(\alpha + ß)$ en función de cotg.

.....

.....

6. Hallar, utilizando la sugerencia que se da al final del ejercicio:

a) sen 2α = ...

.....

b) cos 2α = ...

.....

c) tg 2α = ...

.....

Sug. Reemplazar 2α por $(\alpha + \alpha)$. Por ejemplo, sen 2α = sen $(\alpha + \alpha)$.

FÓRMULAS DEL ÁNGULO DOBLE
sen $2\alpha =$
cos $2\alpha =$
tg $2\alpha =$

7. Obtener sen 2α, cos 2α, tg 2α, siendo cos $\alpha = \frac{4}{5}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

.....

.....

8. Calcular:

a) cos α, sabiendo que cos $2\alpha = \frac{1}{6}$, $\left(\frac{\pi}{2} < 2\alpha < 2\pi\right)$.

.....

b) sen α, sabiendo que cos $2\alpha = -\frac{1}{4}$, $\left(0 < 2\alpha < \pi\right)$.

.....

9. Calcular tg $(2\alpha + ß)$, siendo sen $ß = \frac{1}{3}$ y tg $\alpha = \sqrt{2}$ $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$.

.....

10. Indicar V o F. Justificar.

$$\left.\begin{array}{l} \text{tg } \alpha = \frac{5}{12} \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen } 2\alpha = \frac{120}{161} \quad .....$$

.....

11. Calcular tg α, siendo $\cos 2\alpha = -\frac{7}{25}$, $(\pi < 2\alpha < 2\pi)$.

.....

12. Calcular tg $(2\alpha + ß)$ sabiendo que α y ß son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo y $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

.....

.....

13. Calcular $\overline{AC}$, sin utilizar las medidas de los ángulos agudos del $\overset{\triangle}{BAC}$, rectángulo en $\hat{A}$.

$$\text{DATOS} \left\{\begin{array}{l} \text{sen } \alpha = \frac{2}{3} \\ \cos 2\ \beta = \frac{1}{4} \\ \overline{CB} = 12\,(2\sqrt{10} - \sqrt{30}) \end{array}\right.$$

.....

.....

.....

14. Simplificar las siguientes expresiones:

a) $\frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{2}\cos\alpha - 1}$ si $\cos\alpha \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

.....

b) $\frac{\text{sen } 2\alpha - \cos \alpha}{\text{sen } 2\alpha + \cos \alpha}$ si $\cos \alpha \neq 0$; $\text{sen } \alpha \neq -\frac{1}{2}$

.....

.....

15. Demostrar que:

$$\frac{\text{sen}(\alpha + 2\beta) + \text{sen}(\alpha - 2\beta)}{2 \text{ sen } \alpha} = \cos^2 ß - \text{sen}^2 ß \quad \text{si sen } \alpha \neq 0$$

.....

16. Obtener los valores de x que satisfacen:

$3 \cos 2x - 3 (\cos x - 1) = 0$ y $0 \leq x \leq 360°$

.....

.....

17. Calcular:

a) sen (-15°) = ...

.....

b) sen 195° = ...

.....

c) tg 195° - tg 75° = ...

.....

d) 3 cos 15°+2 sen 15° + sen 75°= .....

.....

18. Hallar, utilizando la sugerencia dada al final del ejercicio:

a) $\text{sen } \frac{\alpha}{2}$ .....

.....

b) $\cos \frac{\alpha}{2}$ .....

.....

c) $\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$ .....

.....

Sug. Tomar $\alpha = 2\,\frac{\alpha}{2}$ Por ejemplo, $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\ 2\,\frac{\alpha}{2}\ \text{sen}\ 2\,\frac{\alpha}{2}$

FÓRMULAS DEL ÁNGULO MITAD
$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} =$
$\cos\ \frac{\alpha}{2} =$
$\text{tg}\ \frac{\alpha}{2} =$

19. Calcular:

a) sen 67° 30' = ...

b) cos 165° = ...

c) tg 112° 30' = ...

d) sen 22° 30' = ...

20. Demostrar las siguientes identidades.

a) $\text{sen}\ \frac{\pi}{2} + \text{tg}\,\alpha\ \text{tg}\,2\,\alpha = \sec 2\,\alpha$ si $\cos\alpha \neq 0$ y $\cos 2\,\alpha \neq 0$

.....

.....

b) $\dfrac{1 + \text{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha}{2}} = 2\ \text{cosec}\,\alpha$ si $\text{sen}\,\alpha \neq 0$ y $\cos\frac{\alpha}{2} \neq 0$

.....

.....

c) $\cos\alpha + \cos 2\,\alpha + \cos 3\,\alpha = (2\cos\alpha + 1)(2\cos^2\alpha - 1)$

.....

.....

21. Obtener el valor de sen 2 α, sabiendo que $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

.....

.....

22. Calcular el valor de sen $\frac{\alpha}{2}$ y sen 2 α, sabiendo que cos 2 $\alpha = \frac{1}{9}$ y $0 < 2\ \alpha < \frac{\pi}{2}$.

.....

.....

23. Resolver analíticamente los puntos del ejercicio 11 de la guía III.

.....

.....

.....

.....

.....

24. Considerar dos ángulos α y ß de manera tal que:

$\alpha + ß = p$
$\alpha - ß = q$

Completar:

α= ..... (Ver sugerencia al final del ejercicio)

ß= .....

sen p + sen q = sen (α + ß) + ...

sen p + sen q = ...

sen p+sen q=2 .....

FÓRMULAS DE LA TRANSFORMACIÓN EN PRODUCTO DE LA SUMA DE DOS SENOS

sen p + sen q = 2 ..... $\frac{p+q}{2}$ ..... $\frac{p-q}{2}$

Sug.: Expresar α y ß en función de p y q, resolviendo el sistema de dos ecuaciones planteado anteriormente.

25. Transformar en producto:

a) sen 15° + sen 75° = ...

.....

b) sen 105° + sen 75° = ...

.....

c) sen 110° + sen 50° = ...

.....

d) sen 70° + sen 20° = ...

.....

26. Demostrar que $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$

.....

.....

.....

27. Demostrar que:

a) $\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$

.....

.....

.....

b) $\cos p - \cos q = -2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \text{ sen } \frac{p-q}{2}$

.....

.....

.....

28. Transformar en producto:

a) sen (-105°) + sen 15° = ...

.....

b) cos 15°-cos (-75°) = ...

.....

c) cos 105° + sen (-75°) = ...

.....

d) sen (-15°) - sen (-105°) = ...

.....

e) 1 + cos 40° = ...

.....

f) 1- sen (-50°) = ...

.....

g) $\sqrt{3}$ + 2 sen 40°= .....

.....

h) 2 sen 20°- $\sqrt{2}$=.....

.....

29. Simplificar las siguientes expresiones, transformando previamente e producto:

a) $\frac{\text{sen } 2x + \text{sen } 6x}{\cos 9x + \cos 5x}$ si $\cos 9x \neq -\cos 5x$

.....

b) $\frac{\cos 2a + \cos 3a}{\text{sen } 2a + \text{sen } 3a}$ si $\text{sen } 2a \neq -\text{sen } 3a$

.....

c) $\frac{\cos 50° + \text{sen } 50°}{\cos 45°}$

.....

d) $\frac{\cos 50° + \cos 40° + \sqrt{2}\cos 85°}{\cos 40°}$

.....

30. Expresar como suma o diferencia de funciones:

a) $2\cos 55° . \cos 45°$ = ...

.....

b) $2\,\text{sen}\,2a . \cos 10a$= .....

.....

c) $2\cos 110° . \text{sen}\,55°$ = ...

.....

d) $-2\,\text{sen}\,20° . \text{sen}\,5°$ = ...

.....

31. Resolver las siguientes ecuaciones para valores de x tales que $0 \leq x < 360°$

a) $\cos(x + 2\pi) - 1 = \cos\frac{\pi}{2} - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$ si $\cos\frac{x}{2} \neq 0$

.....

.....

b) $\cos 4x + \cos 2x + 1 = 0$

.....

.....

c) $\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 1$

.....

.....

d) $\operatorname{sen}\frac{x}{4} - \operatorname{sen}\frac{x}{2} = 0$

.....

.....

e) $\frac{\operatorname{sen}(x + 30°)}{\cos 30°} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos x = 1$

.....

.....

f) $\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen}(-x) = 0$

.....

.....

32. Demostrar que:

$\frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x}{\cos x + \cos 2x + \cos 3x} = \operatorname{tg} 2x$ si $\cos x \neq -\frac{1}{2}$ y $\cos x \neq \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

.....

.....

Forma trigonométrica de un número complejo

Fijemos en el plano un sistema de coordenadas cartesianas perpendiculares de origen 0 y ejes X, Y y consideremos el conjunto C de los números complejos.

Si z es un elemento de C de componente real a y componente imaginaria b, es decir,

$z = a + bi$

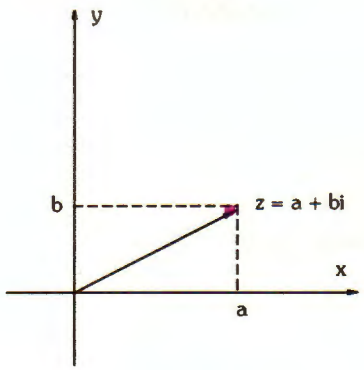


fig. 3

podemos hacer corresponder a z el punto del plano de coordenadas (a; b). Recíprocamente, a cada punto del plano de coordenadas (a; b) le corresponde el numero complejo a + bi (fig. 3).

Se establece así, una correspondencia uno a uno entre los elementos de C y los puntos del plano, de manera análoga a la establecida entre los puntos de una recta y el conjunto de los números reales.

Como cada punto A = (a; b) del plano, determina un vector fijo de origen 0 y extremo A, a cada número complejo z = a + bi corresponde un vector $\overrightarrow{OA}$ y a cada vector $\overrightarrow{OA}$ un número complejo. Podemos entonces representar a z por medio del vector $\overrightarrow{OA}$ (fig. 4).

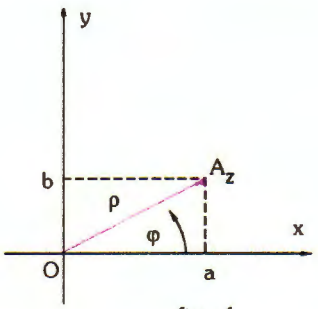


fig. 4

El módulo de ese vector, es el módulo del número complejo. Así, en la figura 4, el módulo del vector que representa a z = a + bi es ρ. Luego ρ es el módulo de z, es decir,

$$\rho = |z|$$

y como:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

es:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A la medida del ángulo φ se la llama argumento de z (fig. 4), es decir:

$$\varphi = \arg(z)$$

Observación: Si $\varphi = \arg(z)$ entonces $\varphi + 2K\pi = \arg(z)$, donde K es un número entero. Dando valores a K se obtienen distintos valores del argumento de z. Suele tomarse como argumento principal a aquel que verifica:

$$-\pi \leq \arg(z) \leq \pi$$

Utilizando el módulo ρ y el argumento φ de un número complejo $z = a + bi$ y teniendo en cuenta las relaciones:

$$\cos \varphi = \frac{a}{\rho}$$

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho}$$

de donde:

$$a = \rho \cos \varphi$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \varphi$$

resulta:

$$\boxed{z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)} \quad (1)$$

A la expresión (1) se la llama representación trigonométrica de z.

Ejemplos: 1. Expresar en forma trigonométrica el número complejo

$$z = \frac{3}{2}\sqrt{3} + \frac{3}{2}\,i$$

1° Calculamos ρ :

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = 3$$

2° Calculamos $\varphi = \arg(z)$:

Como: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ (fig. 4)

es: $\operatorname{tg} \varphi = \dfrac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

entonces: $\varphi = 30°$

3° Expresamos a z en forma trigonométrica:

Reemplazando en la fórmula (1) ρ y φ por los valores obtenidos:

$$z = 3(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$$

2. Dado $z = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$, expresar a z en forma binómica.

Como: $\cos 60° = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, reemplazando estos valores en la expresión trigonométrica de z, resulta:

$$z = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i\right) = 1 + \sqrt{3}\,i$$

Para aplicar (C)

(a) Expresar en forma trigonométrica los siguientes números complejos.

$z_1 = 1 + i$

.....

.....

$z_2 = \sqrt{3} - i$

.....

.....

$z_3 = 2\,i$

.....

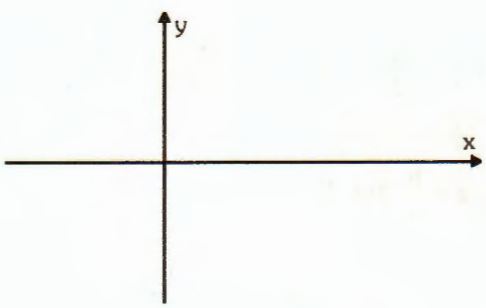
.....

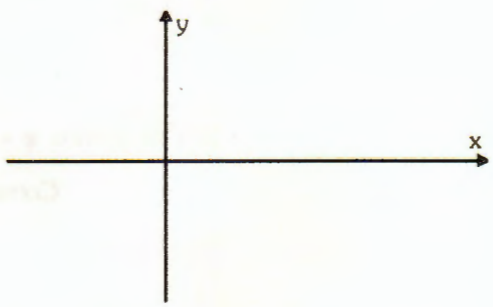
$z_4 = -2 + 2\sqrt{3}\,i$

.....

.....

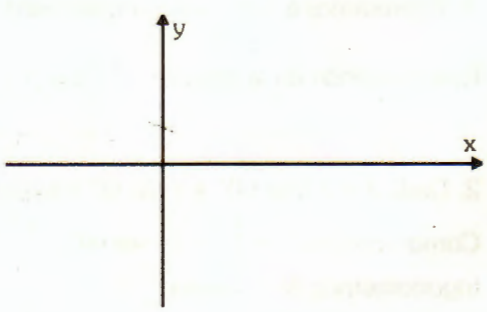
(b) Representar los siguientes números complejos:





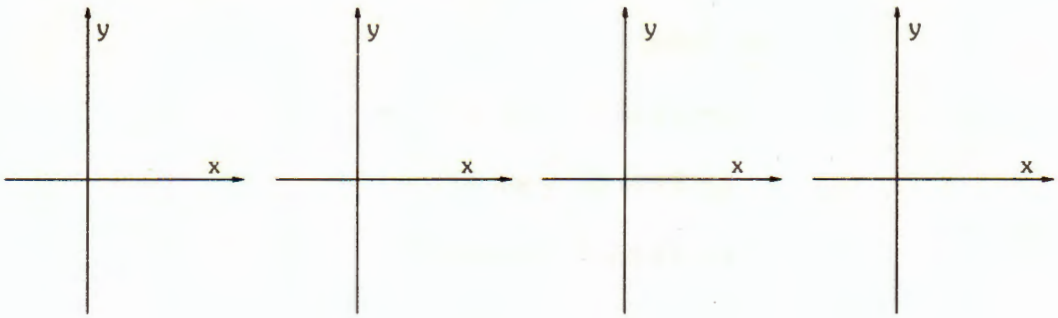
$z_1 = 2\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$

$z_2 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$

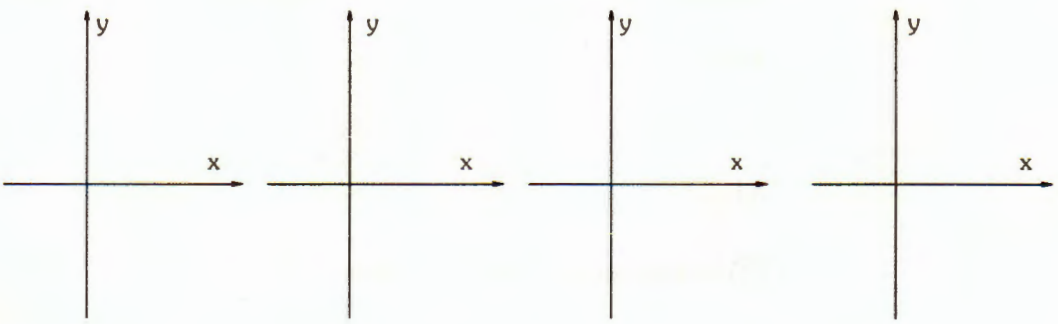


$z_3 = \frac{4}{3}\,(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

c) Determinar las siguientes regiones del plano:



$|z| = 3$ $\quad |z| \leq \frac{1}{2}$ $\quad |z| < 2$ $\quad |z| > 3$



$\text{Im}(z) \leq 1$ $\quad R(z) > -3$ $\quad 0 \leq \arg(z) \leq \frac{3}{2}\pi$ $\quad 1 < |z| \leq 5$

Operaciones con números complejos en forma trigonométrica

Multiplicación

Sean $z = \rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$ y $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$

entonces:

$$z.z_1 = \rho.\rho_1(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)(\cos\varphi_1 + i \operatorname{sen}\varphi_1)$$

$$= \rho.\rho_1[(\cos\varphi\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_1) + i(\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_1)] \quad (1)$$

pero:

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_1 = \cos(\varphi + \varphi_1)$$

y $\cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_1 = \operatorname{sen}(\varphi + \varphi_1)$

reemplazando en (1), resulta:

$$z.z_1 = .\rho.\rho_1[\cos(\varphi+\varphi_1) + i \operatorname{sen}(\varphi+\varphi_1)]$$

Para aplicar (D)

(a) Dados:

$z_1 = 2\ (\cos 60° - i \operatorname{sen} 60°)$

$z_2 = 3\ (\cos 30° - i \operatorname{sen} 30°)$

$z_3 = \sqrt{3}\ (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

$z_4 = \sqrt{3}\ (\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

Obtener:

$a_1)\ z_1 . z_2 =$ .....

$a_2)\ z_3 . z_4 =$ .....

$a_3)\ z_1 . z_4 =$ .....

$a_4)\ z_2 . z_3 =$ .....

(b) Si $z = \rho\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, obtener:

$b_1)\ z^2 =$ .....

.....

$b_2)\ z^3 =$ .....

.....

En general se cumple que:

FÓRMULA DE DE MOIVRE

$$z^n = \rho^n\ (\cos n\ \varphi + i \operatorname{sen} n\ \varphi)$$

(c) Dado $z = 3\ (\cos 15° + i \operatorname{sen} 15°)$, obtener:

$c_1)\ z^2 =$ .....

$c_2)\ z^3 =$ .....

División

Sean $z = \rho\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$ y $z_1 = \rho_1\ (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$
entonces:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\rho\ (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)}{\rho_1\ (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}$$

$$= \frac{\rho}{\rho_1} \frac{(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)\ (\cos \varphi_1 - i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\cos^2 \varphi_1 + \operatorname{sen}^2 \varphi_1}$$

$$= \frac{\rho}{\rho_1}[(\cos\varphi\cos\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_1) + i(\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi_1 - \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_1)] \quad (1)$$

pero:

$$\cos\varphi\cos\varphi_1 + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\varphi_1 = \cos(\varphi - \varphi_1)$$

y $$\cos\varphi_1\operatorname{sen}\varphi - \cos\varphi\operatorname{sen}\varphi_1 = \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_1)$$

reemplazando en (1), resulta:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{\rho}{\rho_1}[(\cos(\varphi - \varphi_1) + i\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_1)]$$

Para aplicar (E)

Dados $z_1 = 2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$
y $z_2 = 6(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

hallar:

$\frac{z_1}{z_2} =$ .....

$\frac{z_2}{z_1} =$ .....

Raíces de los números complejos

Todo número complejo distinto de cero, tiene n raíces enésimas distintas.

Ejemplo: Calcular las tres raíces cúbicas de $z = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

1°) Expresamos a z en forma trigonométrica:

$z = 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

o bien:

$z = 3[\cos(60° + 360° k) + i \operatorname{sen}(60° + 360° k)]$, donde $K \varepsilon Z$

2°) Aplicamos la fórmula de DE MOIVRE:

$$z^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{1}{3}}\left[\cos\frac{1}{3}(60° + 360° k) + i\operatorname{sen}\frac{1}{3}(60° + 360° k)\right]$$

entonces:

$$w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{3}[\cos(20° + 120° k) + i\operatorname{sen}(20° + 120° K)]$$

3°) Dando valores k se obtienen las raíces buscadas:

si $k = 0 \Rightarrow w_1 = \sqrt[3]{3}(\cos 20° + i \operatorname{sen} 20°)$

$k = 1 \Rightarrow w_2 = \sqrt[3]{3}\ (\cos 140° + i \operatorname{sen} 140°)$

$k = 2 \Rightarrow w_3 = \sqrt[3]{3}\ (\cos 260° + i \operatorname{sen} 260°)$

Si continuamos dando valores a k, vuelven a repetirse w_1, w_2 y w_3, por lo tanto éstas son las tres raíces cúbicas de z.

Representando gráficamente a w_1, w_2 y w_3 observamos que en la circunferencia $C(0, \sqrt[3]{3})$ determinan tres arcos de igual longitud (fig. 5).

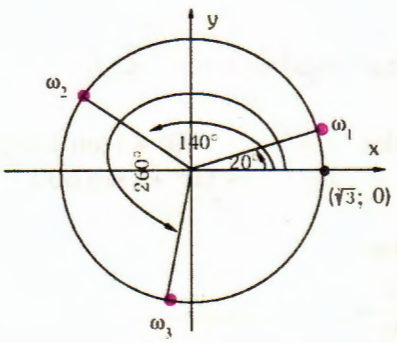


fig. 5

Para aplicar (F)

(a) Hallar las raíces cuartas de los siguientes números complejos:

$a_1)$ $z = 8\ (\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

.....

.....

.....

$a_2)$ $z = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$

.....

.....

.....

$a_3)$ $z = 3 - 3i$

.....

.....

.....

a_4) $z = -1$

.....

.....

.....

(b) Representar gráficamente las raíces halladas en (a).

PARA EJERCITAR

33. Calcular las siguientes potencias, utilizando la fórmula de DE MOIVRE, y expresar luego el resultado en forma binómica:

a) $(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)^2 =$ .....

.....

b) $[\sqrt{8}\ (\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)]^4 =$ .....

.....

c) $(-1 - i)^5 =$ .....

.....

d) $(\sqrt{27} - 3i)^3 =$ .....

.....

34. Comprobar si $z = 2\ (\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$ satisface $x^2 - 2x + 4 = 0$.

.....

.....

35. Comprobar si $z = \text{sen } 75° + i \cos 75°$ satisface $x^8 - x^4 + 1 = 0$.

.....

.....

36. Hallar:

a) Las raíces cuadradas de $1 + i\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

b) Las raíces cuartas de $-1 + i$.

.....

.....

.....

c) Las raíces quintas de $5 - 5i$.

.....

.....

.....

37. Dados $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 2i$, hallar:

a) $z_1 \cdot z^2_2 =$ .....

.....

b) $\frac{z_1^8}{z_2} =$ .....

.....

c) $z_1 + (z_2)^3 =$ .....

.....

Para recordar

Producto escalar

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \ |\vec{B}| \cos(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = a_x b_x + a_y b_y$$

Fórmulas de adición

$$\text{sen}(\alpha + ß) = \text{sen}\,\alpha \cos ß + \text{sen}\, ß \cos \alpha$$
$$\cos(\alpha + ß) = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen}\,\alpha \,\text{sen}\, ß$$

$$\text{sen}\ 2\alpha = 2 \,\text{sen}\,\alpha \ \cos \alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \text{sen}^2 \alpha$$

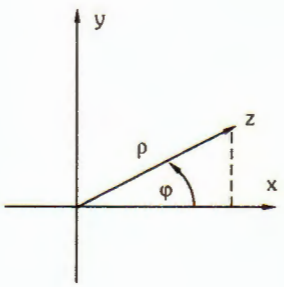
$$\text{sen}\ \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Números complejos

Forma trigonométrica:

$$z = \rho (\cos \varphi + i \,\text{sen}\, \varphi)$$



Potencia enésima

$$z^n = \rho^n (\cos n \varphi + i \,\text{sen}\, n \varphi)$$

GUIA DE ESTUDIO V

5.1 Manejo de Tablas y Calculadora

Para ejercitar (Ejercicios n° 1 al 25)

5.2 Teoremas del seno y del coseno

Para aplicar (A)
Para ejercitar (Ejercicios n° 26 al 42)

Para Recordar

5.1 MANEJO DE TABLAS Y CALCULADORA

Hasta aquí hemos trabajado con los valores de las funciones trigonométricas de un conjunto muy reducido de ángulos. Estos fueron calculados a partir de la definición de las funciones, aplicándose además en algunos casos, propiedades geométricas relativamente simples.

Como el cálculo de los demás valores requiere la utilización de conceptos y métodos más complejos, éstos han sido tabulados. De esta manera pueden obtenerse los valores aproximados de las funciones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0° y 90° y deducirse los restantes.

Describimos a continuación el manejo de dos tablas usuales (Modelo A y Modelo B) llamadas tablas de valores naturales de las funciones trigonométricas.

Primer Problema: Dado el ángulo, calcular el valor de una función trigonométrica.

Ejemplo

Hallar el valor de: a) sen 26° 10' b) sen 27° 22' 50"

Tabla modelo A

sen 26° 10' sen 27° 22'

'	26° Seno	Coseno	Tang.	Cotang.	'	'	27° Seno	Coseno	Tang.	Cotang.	'
0	0,43837	0,89879	0,48773	2,05030	60	0	0,45399	0,89101	0,50953	1,96261	60
1	43863	89867	48809	04879	59	1	45425	89087	50989	96120	59
2	43889	89854	48845	04728	58	2	45451	89074	51026	95979	58
3	43916	89841	48881	04577	57	3	45477	89061	51063	95838	57
4	43942	89828	48917	04426	56	4	45503	89048	51099	95698	56
5	0,43978	0,89816	0,48953	2,04276	55	5	0,45529	0,89035	0,51136	1,95557	55
6	43994	89803	48989	04125	54	6	45554	89021	51173	95417	54
7	44020	89790	49026	03975	53	7	45580	88008	51209	95277	53
8	44046	89777	49062	03825	52	8	45606	88995	51246	95137	52
9	44072	89764	49098	03675	51	9	45632	88981	51283	94997	51
10	0,44098	0,89752	0,49134	2,03526	50	10	0,45658	0,88968	0,51319	1,94858	50
11	44124	89739	49170	03376	49	11	45684	88955	51356	94579	49
12	44151	89726	49206	03227	48	12	45710	88942	51393	94579	48
13	44177	89713	49242	03078	47	13	45736	88928	51430	94440	47
14	44203	89700	49278	02929	46	14	45762	88915	51467	94301	46
15	0,44229	0,89687	0,49315	2,02780	45	15	0,45787	0,88902	0,51503	1,94162	45
16	44255	89674	49351	02631	44	16	45813	88888	51540	94023	44
17	44281	89662	49387	02483	43	17	45839	88875	51577	93885	43
18	44307	89649	49423	02335	42	18	45865	88862	51614	93746	42
19	44333	89636	49459	20187	41	19	45891	88848	51651	93608	41
20	0,44359	0,89623	0,49495	2,02039	40	20	0,45917	0,88835	0,51688	1,93470	40
21	44385	89610	49532	01891	39	21	45942	88822	51724	93332	39
22	44411	89597	49568	01743	38	22	45968	88808	51761	93195	38
23	44437	89584	49604	01596	37	23	45994	88795	51798	93057	37
24	44464	89571	49640	01449	36	24	46020	88782	51835	92920	36
25	0,44490	0,89558	0,49677	2,01302	35	25	0,46046	0,88768	0,51872	1,92789	35
26	44516	89545	49713	01155	34	26	46072	88755	51909	92645	34
27	44542	89532	49749	01008	33	27	46097	88741	51943	92508	33

a) sen 26° 10' = 0,44098 (se lee directamente en la tabla)

b) Como el ángulo dado no figura en la tabla, se realiza el siguiente procedimiento (interpolación):

$$60''\left[\begin{array}{l} 50''\left[\begin{array}{ll}\text{sen } 27°\ 22' & \_\_\_\_\_\ 0{,}45968 \\ \text{sen } 27°\ 22'\ 50'' & \\ \text{sen } 27°\ 23' & \_\_\_\_\_\ 0{,}45994\end{array}\right.\end{array}\right] \quad 0{,}00026$$

Calculadas las diferencias, planteamos:

$$60'' \_\_\_\_\_ 0{,}00026$$

$$50'' \_\_\_\_\_ x \qquad \Rightarrow x = \frac{50'' \cdot 0{,}00026}{60''} = 0{,}00022$$

Como la función seno es creciente entre 0° y 90°, x = 0,00022 se suma al valor del sen 27° 22', leído de la tabla, resultando el seno del ángulo buscado.

Es decir:

$$\text{sen } 27°\ 22'\ 50'' = 0{,}45968 + 0{,}00022 = 0{,}45990$$

Tabla Modelo B

SENO

Grados	Minutos						Grados
	0	5	10	15	20	25	
0	0.00000	0.00148	0.002891	0.00436	0.00582	0.00727	89
1	0.01745	0.01891	0.02036	0.02181	0.02327	0.02472	88
2	0.03490	0.03635	0.03781	0.04071	0.04071	0.04217	87
3	0.05234	0.05379	0.05524	0.05669	0.05814	0.05960	86
4	0.06976	0.07121	0.07266	0.07411	0.07556	0.07701	85
5	0.08716	0.08860	0.09005	0.09150	0.09295	0.09440	84
6	0.10453	0.10597	0.10742	0.10887	0.11031	0.11176	83
7	0.12187	0.12331	0.12476	0.12620	0.12764	0.12908	82
8	0.13917	0.14061	0.14205	0.14349	0.14493	0.14637	81
9	0.15643	0.15787	0.15931	0.16074	0.16218	0.16361	80
10	0.17365	0.17508	0.17651	0.17794	0.17937	0.18081	79
11	0.19081	0.19224	0.19366	0.19509	0.19652	0.19794	78
12	0.20791	0.20933	0.21076	0.21218	0.21360	0.21502	77
13	0.22495	0.22637	0.22778	0.22920	0.23062	0.23203	76
14	0.24192	0.24333	0.24474	0.24615	0.24756	0.24897	75
15	0.25882	0.26022	0.25163	0.26303	0.26443	0.26584	74
16	0.27564	0.27704	0.27843	0.27983	0.28123	0.28262	73
17	0.29237	0.29376	0.29515	0.29654	0.29793	0.29932	72
18	0.30902	0.31040	0.31178	0.31316	0.31454	0.31593	71
19	0.32557	0.32694	0.32832	0.32969	0.33106	0.33244	70
20	0.34202	0.34339	0.34475	0.34612	0.34748	0.34884	69
21	0.35837	0.35973	0.36108	0.36244	0.36379	0.36515	68
22	0.37561	0.37595	0.37730	0.37865	0.37999	0.38134	67
23	0.39073	0.39207	0.39341	0.39474	0.39608	0.39741	66
24	0.40674	0.40806	0.40939	0.41072	0.41204	0.41337	65
25	0.42262	0.42394	0.42525	0.42657	0.42788	0.42920	64
sen 26° 10' → 26	0.43837	0.43968	0.44098	0.44229	0.44359	0.44490	63
27	0.45399	0.45529	0.45658	0.45787	0.45917	0.46046	62
28	0.46947	0.47076	0.47204	0.47332	0.47460	0.47588	61
29	0.48481	0.48608	0.48735	0.48862	0.48989	0.49116	60

a) sen 26°10' = 0,44098 (se lee directamente de la tabla)

b) Como el valor no se encuentra en la tabla, debemos hallarlo mediante interpolación:

$$300'' \left[\begin{array}{l} 150'' \left[\begin{array}{ll} \text{sen } 27°\ 20' & \_\_\_\_\_\ 0{,}45917 \\ \text{sen } 27°\ 22'\ 50'' & \\ \text{sen } 27°\ 25' & \_\_\_\_\_\ 0{,}46046 \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (0{,}00129)$$

Calculadas las diferencias, planteamos:

$$\begin{array}{ll} 300'' \ \_\_\_\_\_\ 0{,}00129 & \\ 150'' \ \_\_\_\_\_\ x & \Rightarrow x = 0{,}00065 \end{array}$$

Como la función seno es creciente entre 0° y 90°:

$$\text{sen } 27°22'50'' = 0{,}45912 + 0{,}00065 = 0{,}45982$$

OBSERVACIÓN: Una mayor aproximación se obtiene interpolando separadamente minutos y segundos.

Segundo Problema: Dado el valor de una función trigonométrica, hallar el ángulo al cual corresponde.

Ejemplo:

Hallar α siendo:

a) sen α = 0,45529

b) sen α = 0,44324

Tabla Modelo A

Solución

a) $\alpha = 27°5'$ (se lee directamente de la tabla)

b) El valor dado no figura en la tabla, procedemos entonces a interpolar.

$$0{,}00026 \left[\begin{array}{l} 0{,}00017 \left[\begin{array}{ll} 0{,}44307 & \_\_\_\_\_\ 26°\ 18' \\ 0{,}44324 & \\ 0{,}44333 & \_\_\_\_\_\ 26°\ 19' \end{array} \right. \end{array} \right] \quad (60'')$$

Calculadas las diferencias planteamos:

$$\begin{array}{ll} 0{,}00026 \ \_\_\_\_\_\ 60'' & \\ 0{,}00017 \ \_\_\_\_\_\ x & \Rightarrow x = \dfrac{60'' \,.\, 0{,}00017}{0{,}00026} \end{array}$$

$$x = 39''$$

Como seno es una función creciente entre 0° y 90°

$$\alpha = 26°18' + 39''$$

$$\boxed{\alpha = 26° 18' 39''}$$

Tabla Modelo B

Solución

a) $\alpha = 27°5'$ (se lee directamente de la tabla)

b) Como el valor no figura en la tabla, debemos interpolar.

$$0{,}00130 \left[\begin{array}{l} 0{,}00095 \left[\begin{array}{ll} 0{,}44229 & \_\_\_\_\_ \; 26° \; 15' \\ 0{,}44324 & \\ 0{,}44359 & \_\_\_\_\_ \; 26° \; 20' \end{array} \right. \end{array} \right] \; 300''$$

Calculadas las diferencias, planteamos:

$$0{,}00130 \; \_\_\_\_\_ \; 300''$$

$$0{,}00095 \; \_\_\_\_\_ \; x \qquad \Rightarrow \; x = \frac{0{,}00095 \cdot 300''}{0{,}00130}$$

$$x = 219'' \cong 3'39''$$

Como la función seno es creciente entre 0° y 90°

$$\alpha = 26° \; 15' + 3' \; 39''$$

$$\boxed{\alpha = 26° \; 18' \; 39''}$$

Solución del primer problema, con calculadora

Ejemplo: Calcular sen 18°20' 30"

Debe seguirse la siguiente secuencia de teclas:

1	8	° ' "	2	0	° ' "	3	0	° ' "	SIN

aparece en pantalla: 0,3146828

luego, sen 18°20'30" = 0,3146828

Solución del segundo problema, con calculadora

Ejemplo: Calcular α, $(0° \leq \alpha \leq 90°)$, siendo:

$$\text{sen } \alpha = 0{,}38994$$

Para obtener α debe seguirse la siguiente secuencia de teclas:

0	.	3	8	9	9	4	INV	SIN

aparece en pantalla: 22°.950766

luego:

INV	° ' "

aparece en pantalla: 22°57'2.7

luego, α = 22° 57' 3".

PARA EJERCITAR

1. Hallar el valor de:

a) sen 18°20'32"= .....

cos 53°30"= .....

tg 72°50'20"= .....

b) sen 123°18'40"= .....

cos 220°30'10"=.....

tg 394°50"= .....

2. Obtener α (0° ≤ α ≤ 180°), siendo:

a) sen α = 0,53492 .....

.....

b) cos α = 0,06552 .....

.....

c) tg α = 0,64327 .....

.....

d) tg α = - 2,50852 .....

.....

e) cos α = - 0,12724 .....

.....

3. Calcular el valor de x, siendo $0° \leq x < 180°$, que satisface:

a) $\text{tg}\,(x + 3°) = 1{,}8$ .....

.....

b) $\sec\,(2x - 4°) = 3$ .....

.....

c) $\cos\,(3x + 250^G) = 0{,}72$ .....

.....

d) $\text{sen}\,(32° + 2x) = \frac{4}{7}$ .....

.....

e) $\cos\left(\frac{3x - 52°}{2}\right) = \frac{1}{3}$ .....

.....

4. Obtener el valor de x, siendo en todos los casos $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Verificar la solución:

a) $\text{sen}\ x = 2 \cos x$ .....

.....

b) $\text{sen}\ x + \cos x = 1{,}3$ .....

.....

c) $4 \text{sen}\ x \cos x + 2 \cos x = 0$ .....

.....

d) $27 \cos^2 x - 18 = 10 \text{sen}\ x$ .....

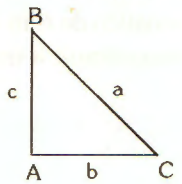
.....

e) $\text{cosec}\ x - \sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{tg}\ x$ .....

.....

5. Resolver los siguientes triángulos rectángulos utilizando únicamente los datos.

a) a=12 b=7



.....

.....

b) b=8 c= 10

.....

.....

c) a= 13 ß = 24°20'

.....

.....

d) c = 5 γ = 52°40'

.....

.....

e) b = 6 γ = 30°20'

.....

.....

6. En un triángulo rectángulo la hipotenusa mide 5 cm y uno de sus catetos la mitad de ésta. Calcular sus ángulos.

.....

.....

7. En un triángulo rectángulo uno de sus catetos mide 2 cm y el otro la tercera parte de éste. Obtener el valor de cada uno de los ángulos agudos del triángulo.

.....

.....

8. Calcular los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que un cateto es la cuarta parte del otro.

.....

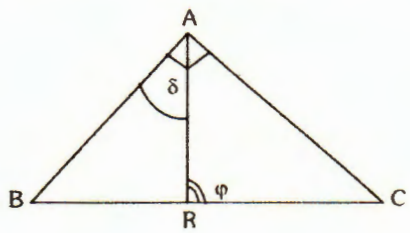
.....

9. ¿ Cuál será la inclinación respecto al nivel del agua, que deberá darse a una rampa de esquí acuático de 6 m de longitud, si en el momento de ser abandonada por el esquiador, éste debe encontrarse a una distancia del agua igual a 2 m?

.....

.....

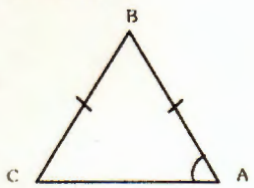
10. Calcular la superficie de $\hat{ABC}$.



DATOS
$\overline{AC} = 502$ cm
$\overline{BR} = 302{,}93$ cm
$\delta = 43° 18'$
$\varphi = 91° 58' 20''$

.....

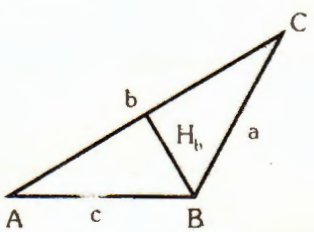
11. Calcular la superficie del triángulo isósceles $\hat{ABC}$, sabiendo que el ángulo Â mide 58°27' y que la altura correspondiente a uno de sus dos lados congruentes es de 20 cm.



.....

.....

12. Calcular H_b .



DATOS
$\hat{ABC}$ isósceles
$\beta = 112° 22' 40''$
$\overline{AC} = 68{,}5$ m

.....

13. Calcular los ángulos interiores adyacentes a la base, de un triángulo isósceles, sabiendo que la medida de la base es la mitad de la medida de cada uno de los otros dos lados.

.....

.....

14. Calcular los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa miden 4 cm y 6 cm respectivamente.

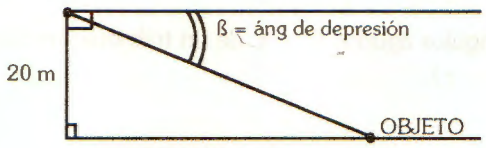
.....

.....

15. Desde la terraza de un edificio situada a 20 m de altura se ve un objeto.

a) Calcular la distancia del objeto al pie del edificio, siendo el ángulo de depresión de 22°10'.

Aclaración:



.....

.....

b) Calcular el ángulo de depresión, si la distancia del objeto al pie del edificio es de 30 m.

.....

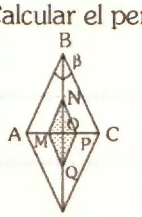
.....

16. Calcular la mitad de la base de un triángulo isósceles, si el ángulo opuesto es de 45° y la altura correspondiente a dicha base es $\sqrt{3}$.

.....

.....

17. Calcular el perímetro del rombo MNPQ.



DATOS
- ABCD rombo
- b = 40°
- $\overline{BD}$ = 18 cm (diagonal principal)
- M, N, P, y Q puntos medios de $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ respectivamente

.....

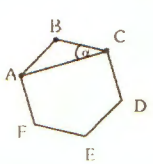
.....

18. Si en un triángulo isósceles rectángulo la hipotenusa mide 12 cm, cuánto mide el segmento de bisectriz de uno de sus ángulos agudos?

.....

.....

19. Si ABCDEF es un hexágono regular y $\overline{AB}$ = 4 cm



a) Calcular $\overline{AC}$.

.....

.....

b) Calcular α .

.....

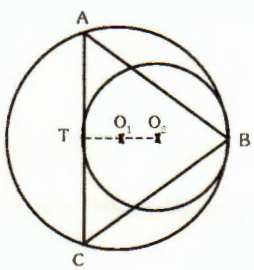
.....

20. Calcular los ángulos agudos ß y γ de un triángulo rectángulo, sabiendo que cos ß = 3 sen (90° - γ).

.....

.....

21. Calcular los ángulos interiores del $\overset{\Delta}{ABC}$.



B punto de tangencia de las circunferencias C (0_1, 5) y C (0_2, 3)

$\overline{AC}$ tangente a C (0_2, 3) en T

0_1, 0_2 ε $\overline{TB}$

22. Calcular el ángulo α que forman cada una de las siguientes rectas con el semieje positivo X.

a) y = 2x + 3

.....

.....

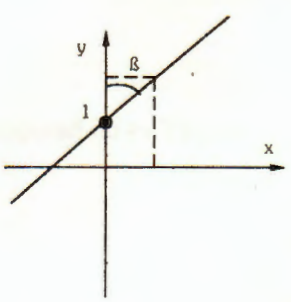
c) y = -3x + 1

.....

.....

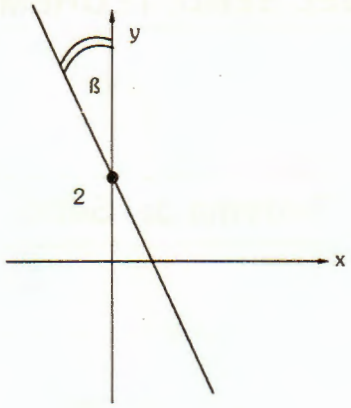
23. Hallar ß en cada uno de los siguientes casos:

a) $y = \frac{3}{4}x + 1$



.....

b) $y = -2x + 2$



.....

.....

24. Calcular el menor de los ángulos determinados, en cada caso, por las rectas y_1 e y_2:

a) $y_1 = -x + 2$

$y_2 = \frac{1}{2}x + 1$

.....

.....

b) $y_1 = \frac{3}{4}x - 2$

$y_2 = -\frac{2}{5}x$

.....

.....

25. Demostrar que en todo triángulo el área es igual al semiproducto de la medida de los lados por el seno del ángulo comprendido. Es decir:

$$\text{Área } \overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2} a\, b \operatorname{sen} \gamma$$

.....

.....

Teorema del Seno

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.

Esta propiedad puede comprobarse considerando en el triángulo $A\hat{B}C$ los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ y $\vec{h}_b$ orientados como se indica en la figura 1.

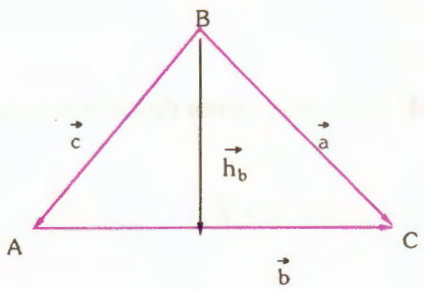


fig. 1

Como:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

haciendo el producto escalar por $\vec{h}_b$ en ambos miembros de la igualdad:

$$\vec{a} \times \vec{h}_b = (\vec{b} + \vec{c}) \times \vec{h}_b$$

resulta:

$$\vec{a} \times \vec{h}_b = \vec{b} \times \vec{h}_b + \vec{c} \times \vec{h}_b$$ por propiedad distributiva del producto escalar

pero, por definición de producto escalar es:

$$\vec{a} \times \vec{h}_b = a\ h_b \cos(90° - \gamma) = b\ h_b \cos 90° + c\ h_b \cos(90° - \alpha)$$

es decir:

$$a\ h_b \operatorname{sen} \gamma = c\ h_b \operatorname{sen} \alpha$$

y como $h_b \neq 0$, dividiendo ambos miembros por h_b:

$a \operatorname{sen} \gamma = c \operatorname{sen} \alpha$

o bien:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} \qquad (1)$$

Análogamente, trazando la altura h correspondiente al lado $\overline{BC}$, se obtiene:

$$\frac{c}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} \qquad (2)$$

Entonces de (l) y (2) resulta:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen} \beta} = \frac{c}{\operatorname{sen} \gamma}$$

Teorema del Coseno

En todo triángulo el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de ellos por el coseno del ángulo que determinan.

Comprobamos el teorema considerando en el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ (fig. 2) los vectores $\vec{a}$, $\vec{b}$, y $\vec{c}$

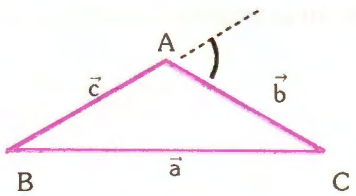


Fig. 2

Como:

$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$

entonces

$\vec{a} \times \vec{a} = (\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{b} + \vec{c})$

es decir:

$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{b} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{c}$

y por definición de producto escalar es:

$a\, a \cos 0° = b\, b \cos 0° + 2\, b\, c \cos (180° - \alpha) + c\, c \cos 0°$

luego:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos \alpha$$

Para aplicar (A)

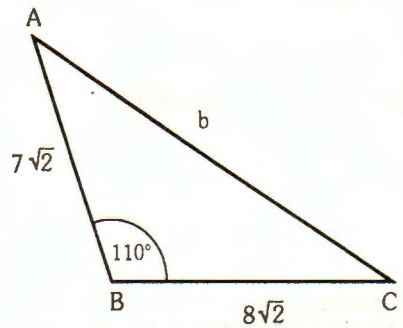
(a) Calcular la amplitud del ángulo mayor de un triángulo de lados 4, 6 y 8 respectivamente

.....

.....

.....

(b) Teniendo en cuenta los datos del $\overset{\Delta}{ABC}$ que aparecen en la figura, calcular b.



.....

.....

.....

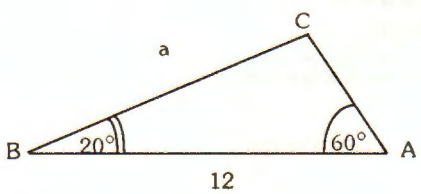
(c) Calcular la amplitud del ángulo C del $\overset{\Delta}{ABC}$ sabiendo que b = 4, c = 5 y ß = 40°.

.....

.....

.....

(d) Teniendo en cuenta los datos del $\overset{\Delta}{ABC}$ de la figura, calcular a.



.....

.....

.....

Fórmula del área de un triángulo en función de sus lados

El área de un triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro por las tres diferencias que se obtienen restando del semiperímetro la medida de cada uno de los lados.

Es decir, dado un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, si llamamos 2p al perímetro, el semiperímetro es p y

$$\text{Área } \overset{\Delta}{ABC} = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$ Fórmula de Herón

Para su demostración se parte de la fórmula

$$\text{Área } \overset{\Delta}{ABC} = \frac{1}{2}\, a\, b \,\text{sen}\, \gamma$$

y luego se aplica el teorema del coseno.

PARA EJERCITAR

26. Demostrar, teniendo en cuenta las sugerencias 1 y 2, que:
En todo triángulo, la tangente de la semidiferencia de dos ángulos es a la tangente de la semisuma de los mismos, como la diferencia de las medidas de los lados opuestos es a su suma (Teorema de las tangentes)

o sea :

$$\frac{\text{tg}\,\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{tg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

Sug. 1: Utilizando el teorema del seno, plantear $\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta}$ y aplicar a esta proporción la propiedad conveniente.

Sug. 2: Tener en cuenta las fórmulas de transformación en producto de sen p - sen q.

.....

.....

.....

27. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos y calcular sus áreas, dadas las medidas de dos lados y el ángulo comprendido.

a) $\begin{cases} a = 12 \\ c = 18 \\ \beta = 42° 25' \end{cases}$

.....

.....

b) $\begin{cases} b = 15 \\ c = 9 \\ \alpha = 123° \ 18' \end{cases}$

.....

.....

.....

28. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos y calcular sus áreas, conociendo la medida de un lado y los dos ángulos adyacentes a dicho lado.

a) $\begin{cases} b = 24 \\ \beta = 76° \ 40' \\ \gamma = 54° \ 26' \ 10'' \end{cases}$

.....

.....

.....

b) $\begin{cases} c = 50 \\ \alpha = 109° \ 52' \\ \beta = 47° \end{cases}$

.....

.....

.....

29. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos conociendo las medidas de sus tres lados.

a) $\begin{cases} a = 30 \\ b = 38 \\ c = 50 \end{cases}$

.....

.....

.....

b) $\begin{cases} a = 72 \\ b = 47 \\ c = 64 \end{cases}$

.....

.....

.....

30. Resolver los siguientes triángulos oblicuángulos conociendo las medidas de dos de sus lados y del ángulo opuesto al mayor de ellos.

a) $\begin{cases} c = 12 \\ b = 9 \\ \alpha = 52° \ 20' \end{cases}$

.....

.....

.....

b) $\begin{cases} b = 64 \\ c = 28 \\ \beta = 109° \end{cases}$

.....

.....

.....

31. Con los siguientes datos, resolver el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y analizar los distintos casos que pueden presentarse.

$\begin{cases} b = 30 \\ c = 32 \\ \gamma = 40° \end{cases}$

.....

.....

.....

$\begin{cases} b = 39 \\ a = 12 \\ \gamma = 48° \ 35' \ 25'' \end{cases}$

.....

.....

32. Calcular la longitud de la diagonal de un pentágono regular de 5 cm de lado.

.....

.....

.....

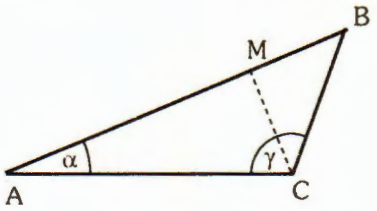
33. En un triángulo, dos de sus ángulos miden 50° y 68° respectivamente. El lado opuesto al mayor de ellos es de 10 cm. ¿Cuál es la medida del segmento de bisectriz correspondiente al ángulo mayor?

.....

.....

.....

34. Calcular CM



DATOS $\begin{cases} \overline{CM} \perp \overline{AB} \\ \alpha = 22° 37' \\ \gamma = 110° 20' \\ \overline{AB} = 65 \text{ cm} \end{cases}$

.....

.....

.....

35. ¿Cuál será la altura de una torre, si el ángulo de elevación disminuye de 50° a 18° cuando un observador que está situado a una determinada distancia del pie de la torre, se aleja 90 m en la misma dirección?

.....

.....

.....

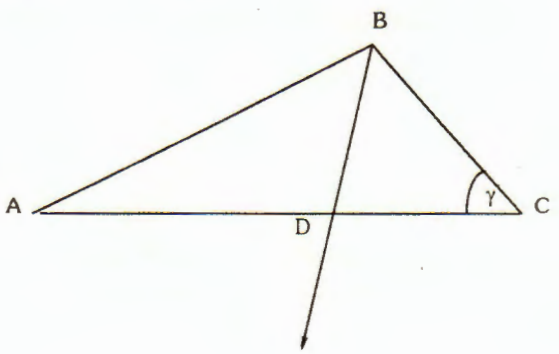
36. Desde el extremo más lejano del patio de una escuela, los ángulos de elevación para observar el pie y el extremo de un mástil, colocado sobre el edificio son de 60° y 65° respectivamente.
Calcular la altura del edificio, sabiendo que la longitud del mástil es de 3 m.

.....

.....

.....

37. Calcular $\overline{BD}$.



DATOS $\begin{cases} \overline{BD} \text{ bisectriz} \\ \overline{AD} = 40 \\ \overline{DC} = 22 \\ \gamma = 50° 10' \end{cases}$

.....

.....

.....

38. Desde la terraza de una confitería situada en el centro de una plaza, a 12 m de altura, se ve hacia el sur la calesita, bajo un ángulo de depresión de 20° y hacia el oeste se ve el tobogán bajo un ángulo de depresión de 14°.
¿Cuál es la distancia aproximada entre la calesita y el tobogán?

.....

.....

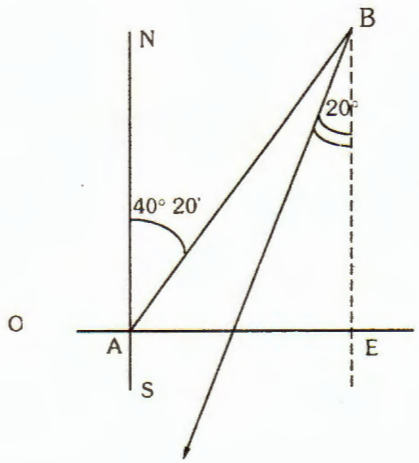
39. Uno de los lados de un triángulo oblicuángulo es de 9 cm. Si uno de los ángulos agudos adyacentes x verifica $4 \operatorname{tg} x - 5 = 4 \operatorname{cotg} x$ y el otro ángulo adyacente equivale a la tercera parte del anterior. ¿Cual es el perímetro del triángulo?

.....

.....

.....

40. Un barco sale de una posición A recorriendo 120 km. en dirección N 40° 20' E y llega a B.
Al tratar de regresar de B, toma dirección S 20°O y recorre 140 km., llegando a C. Calcular a qué distancia de A se encuentra C.



.....

.....

.....

41. Alfonso, que se entrena para las olimpíadas, parte de su casa y camina 8 km en dirección S 50°E hasta llegar a su primera parada. Descansa y parte nuevamente caminando, esta vez, en dirección S 30°O hasta llegar a la segunda parada, donde descansa y regresa a su casa. Si la distancia en línea recta, de su casa a la última parada, es de 11,5 km ¿qué distancia recorrió en el segundo trayecto?

.....

.....

.....

42. Desde el balcón de un edificio se ve, con un ángulo de depresión de 48°20', un automóvil estacionado en la calle. Si desde el balcón de otro piso del mismo edificio, situado 9,36 m más bajo que al anterior, el ángulo de depresión con que se ve el automóvil es de 25°:

a) ¿A qué distancia del edificio se encuentra estacionado?

.....

.....

.....

b) ¿A qué altura se encuentra el primer balcón?

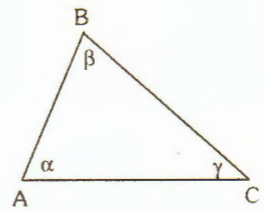
.....

.....

.....

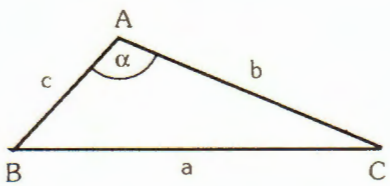
PARA RECORDAR

Teorema del Seno



$$\frac{a}{\text{sen } \alpha} = \frac{b}{\text{sen } \beta} = \frac{c}{\text{sen } \gamma}$$

Teorema del Coseno



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha$$

GUIA DE ESTUDIO VI

6.1 Intervalos

Para aplicar (A)
Para ejercitar (Ejercicios n° 1 al 9)

6.2 Noción de Límite

Para aplicar (B, C, D, E, y F)
Para ejercitar (Ejercicios n° 10 al 13)

6.3 Continuidad

Para aplicar (G y H)
Para ejercitar (Ejercicios n° 14 al 25)

Para Recordar

6.1 INTERVALOS

Dados dos números reales a y b tales que a < b, definimos:

a) Intervalo abierto de extremos a, b:

$(a, b) = \{ x \varepsilon R / a < x < b \}$

Observemos que los extremos a, b no pertenecen a (a, b).

Representación gráfica del intervalo (a, b) :

Para representar gráficamente al intervalo (a, b) en la recta real se ha tenido en cuenta que si a < b, entonces el punto a está a la izquierda del punto b.

b) Intervalo cerrado de extremos a , b:

$[a,b] = \{ x \varepsilon R / a \leq x \leq b \}$

Observemos que en este caso los extremos pertenecen al intervalo.

Representación gráfica del intervalo [a, b]:

c) Intervalos semiabiertos

- CERRADO A IZQUIERDA Y ABIERTO A DERECHA:

$[a,b) = \{ x \varepsilon R / a \leq x < b \}$

Representación gráfica del intervalo [a, b) :

- ABIERTO A IZQUIERDA Y CERRADO A DERECHA

$(a\ b] = \{x \varepsilon R / a < x \leq b\}$

Representación gráfica del intervalo (a, b]:

Intervalos infinitos

Dado a ε R, llamamos intervalos infinitos a los siguientes conjuntos:

$(a,+\infty) = \{x \varepsilon R / x > a\}$

$[a, +\infty) = \{x \varepsilon R / x \geq a\}$

$(-\infty, a) = \{x \varepsilon R / x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \varepsilon R / x \leq a\}$

Para aplicar (A)

(a) Completar :

$a_1)$ $[2, 3] = \{$ ..... $\}$ —— R

$a_2)$ $\left(\frac{7}{2}, 8\right] = \{$ ..... $\}$ —— R

$a_3)$ $\left(-3, \frac{1}{5}\right) = \{$ ..... $\}$ —— R

$a_4)$ $[0, 2) = \{$ ..... $\}$ —— R

$a_5)$ ..... $= \{x \varepsilon R / 3 \leq x < 7\}$ —— R

$a_6)$ ..... $= \{x \varepsilon R / \frac{1}{2} < x \leq 1\}$ —— R

$a_7)$ ..... $= \{$ ..... $\}$ —— R

$a_8)$ ..... $= \{x \varepsilon R / -5 < x < 6\}$ —— R

$a_9)$ ..... $= \{$ ..... $\}$ —— R

b) Representar en la recta los siguientes intervalos:

$b_1)$ $[a, \infty)$

$b_2)$ $(-\infty, a)$

$b_3)$ $(-\infty, a]$

$b_4)$ $(-\infty, +\infty)$

Entorno de un punto a, de radio δ

Dados a y δ pertenecientes a R, $\delta > 0$, llamamos entorno del punto a, de radio δ (E(a, δ)), al intervalo abierto (a - δ, a + δ) representado en la figura 1.

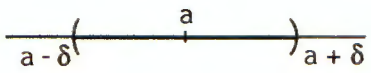


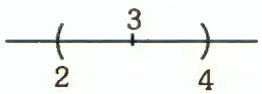
fig. 1

$$E(a, \delta) = \{ x \in R / a - \delta < x < a + \delta \}$$

Ejemplo 1

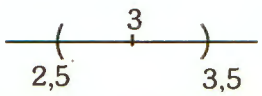
$$E(3, 1) = \{ x \in R / 3 - 1 < x < 3 + 1 \}$$

$$E(3,1) = (2,4)$$



Ejemplo 2

$$E(3, 0,5) = (2,5,3,5)$$



Entorno reducido de un punto a, de radio δ

Llamamos entorno reducido del punto a, de radio δ, al conjunto $E^*(a, \delta)$ que se obtiene excluyendo el punto a del entorno E (a, δ). Es decir:

$$E^*(a, \delta) = E(a , \delta) - \{a\}$$

PARA EJERCITAR

1. Teniendo en cuenta, que las definiciones dadas de intervalos de extremos a, b, pueden extenderse al caso en que a sea igual a b, determinar los siguientes conjuntos:

a) (a, a) .....

b) [a, a] .....

c) [a, a) .....

d) (a, a] .....

2. Indicar los intervalos definidos por los siguientes conjuntos, teniendo en cuenta la sugerencia dada al final del ejercicio:

a) $A=\{x \in R / |x| \leq 5\}=$ .....

b) $B=\{x \in R / |x| < 3\}=$ .....

c) $C=\{x \in R / |x-1| \leq 2\}=$ .....

d) $D = \{x \in R / |2x + 1| < \frac{7}{2}\} =$ .....

Sug. La condición $-a < x < a$ puede expresarse como $|x| < a$.

3. Expresar los siguientes conjuntos como unión de intervalos y representarlos gráficamente:

a) $A = \{x \in R / |x| \geq 1\}$ .....

b) $B = \{x \in R / |x| > 7\}$ .....

c) $C = \{x \in R / |x + 2| \geq 2\}$ .....

d) $D = \{x \in R / |x - 5| \geq \frac{3}{2}\}$ .....

4. Representar gráficamente los siguientes conjuntos:

a) $A= \{x \in R / 3 < x \leq 9\}$

b) $B= \{x \in R / x \leq -\frac{2}{3}\}$

c) $C = \{x \in R / x > \frac{1}{5}\}$

d) $D = \{x \in R / |x| < 1\}$

e) $E= \{x \in R / |3 - x| \leq 4\}$

f) $F= \{x \in R / |3 + 3x| > 2\}$

g) $G = \left\{ x \in R / \left|\frac{2 - x}{5}\right| \geq 1 \right\}$

h) $H = \left\{ x \in R / \left|\frac{2x + 4}{3}\right| \leq \frac{1}{3} \right\}$

i) $I = \left\{ x \in R / \left|\frac{x}{5} - 2\right| > \frac{1}{2} \right\}$

5. Teniendo en cuenta los conjuntos del ejercicio 4 hallar los conjuntos que resultan de las siguientes operaciones:

a) $F \cup I$ .....

b) $C \cup D$ .....

c) $B \cap D$ .....

d) $C \cap E$ .....

e) $D \cap G$ .....

6. Expresar como unión de intervalos cada uno de los siguientes conjuntos:

a) $A = R - (2,4)$ .....

b) $B = R - [-5, 2]$ .....

c) $C = R - [3, 7)$ .....

7. Representar las siguientes funciones en los intervalos indicados en cada caso:

a) $y = 2x + 4$ en $(-1, 2)$

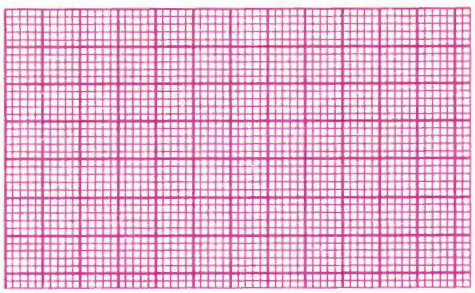
b) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ en $\{x \in R / |x| < 2\}$

c) $y = x^2 + 2x$ en $(-3, 0]$

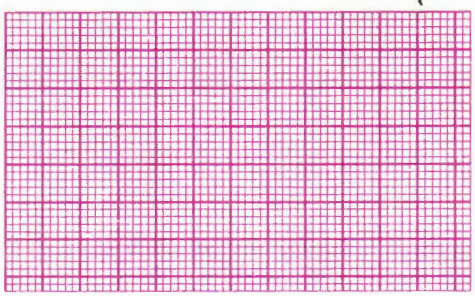
d) $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} x$ en $[0, \pi]$

8. Representar las siguientes funciones:

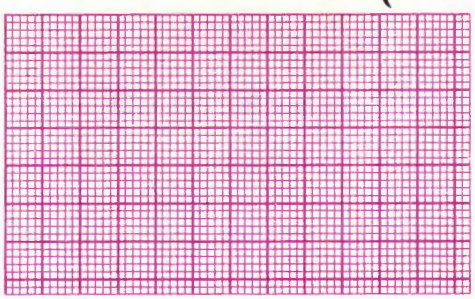
a) f: R → R, dada por: $f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < 2 \\ -x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



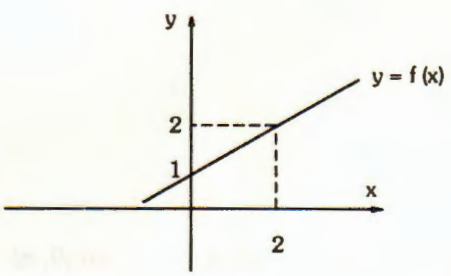
b) f: R → R, dada por: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



c) f: R → R, dada por: $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x < \frac{1}{2} \\ 2 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x > \frac{1}{2} \end{cases}$

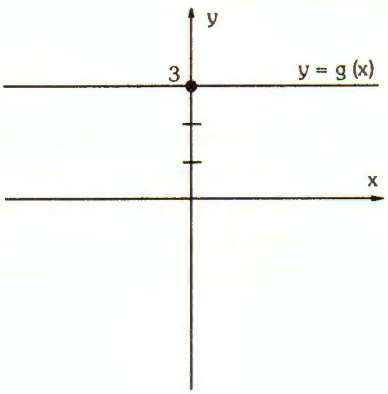


9. Determinar en cada caso el valor máximo y el valor mínimo que alcanza la función en el intervalo cerrado [1, 5].



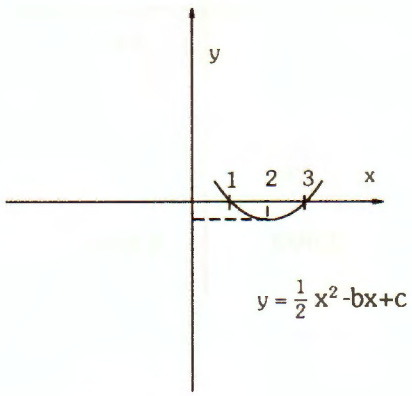
Valor máximo ..... Valor mínimo .....

b)



Valor máximo ..... Valor mínimo .....

c)



Valor máximo ..... Valor mínimo .....

6.2 NOCIÓN DE LÍMITE

Dada una función f: A $\rightarrow$ R (R $\subseteq$ A) y un punto a ε A, estudiaremos el comportamiento de la función en un entorno reducido de a.

Ejemplo 1

Sea f: R $\rightarrow$ R dada por f(x) = 2x - 3 (fig. 2) y a = 4. Estudiaremos el comportamiento de la función en $E^{*}(4, 0{,}5)$.

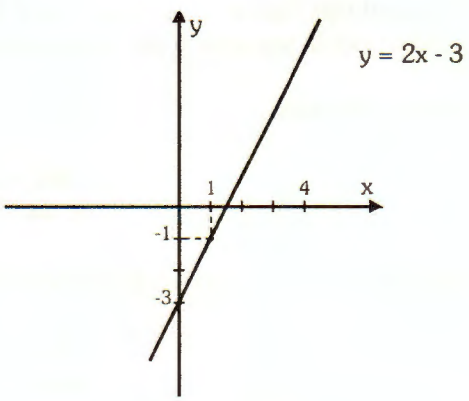


fig. 2

Recordaremos que:

$$E^*(4\ ,\ 0{,}5) = (3{,}5,\ 4{,}5) - \{4\}$$

Luego, como al considerar el entorno reducido $E^*(4,\ 0{,}5)$ queda excluído el punto $a = 4$, no interesa el comportamiento de la función en dicho punto. Debemos entonces analizar la tendencia de los valores de la función, cuando x se aproxima por la izquierda a 4 (fig. 3) es decir por valores del entorno menores que 4 y cuando x se aproxima a 4 por derecha (fig. 4), es decir por valores del entorno mayores que 4.

$x < 4$

x	2x -3
3,8	4,6
3,9	4,8
3,98	4,98
3,999	4,998

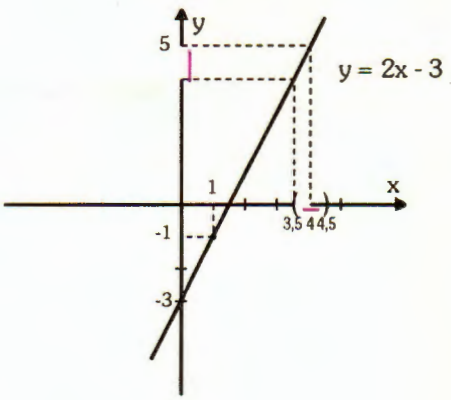


fig. 3

$x > 4$

x	2x -3
4,1	5,2
4,05	5,1
4,01	5,02
4,001	5,002

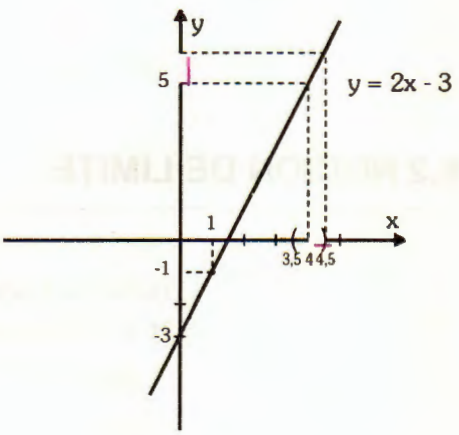


fig. 4

Observando las figuras 3 y 4, se ve que los valores de la función tienden a 5 cuando x se aproxima por la izquierda y por la derecha a 4.

Decimos entonces:

$$\lim_{x \to 4^-} (2x - 3) = 5$$

es decir, límite para x tendiendo a 4 por la izquierda, de 2x - 3 es igual a 5

y

$$\lim_{x \to 4^+} (2x - 3) = 5$$

es decir, limite para x tendiendo a 4 por la derecha, de 2x - 3 es igual a 5.

Como:

$$\lim_{x \to 4^-} (2x - 3) = \lim_{x \to 4^+} (2x - 3) = 5$$

existe el limite de la función para x tendiendo a 4 y es:

$$\lim_{x \to 4} (2x - 3) = 5$$

Gráficamente (fig. 5), se ve que:

Dado un entorno E (5, ε) queda determinado un entorno E* (4, δ) tal que para todo x ε E* (4, δ), f(x) ε E (5, ε)

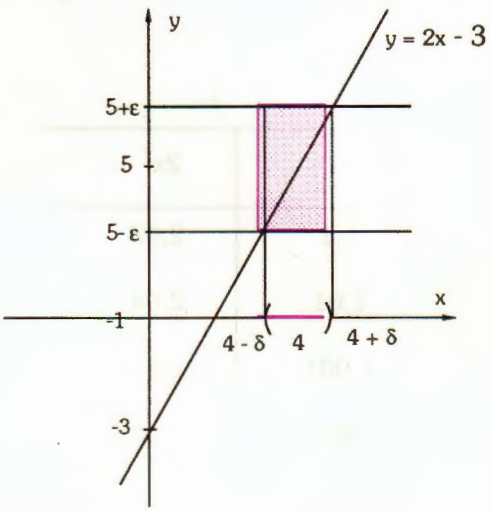


fig. 5

Ejemplo 2

Sea f: R → R tal que f(x) = $2x^2$ (fig. 6) y a = 1.

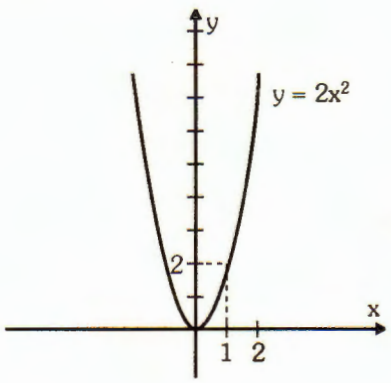


fig. 6

Estudiaremos el comportamiento de la función de un entorno reducido de a = 1.

Sea $\delta = 0,2$ y consideremos el entorno reducido $E^*(1, 0, 2)$. Procediendo como en el ejemplo 1, construímos las tablas de valores para $x < 1$ y para $x > 1$.

$x < 1$

x	$2x^2$
0,9	1,62
0,99	1,96
0,999	1,996
0,999	1,9996

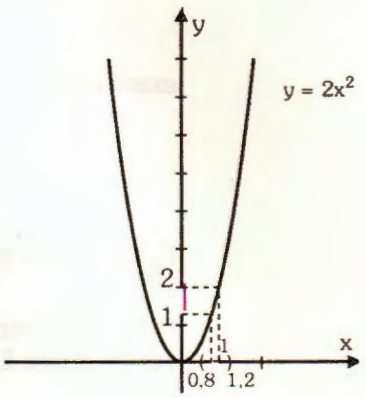


fig 7

$x > 1$

x	$2x^2$
1,1	2,42
1,01	2,04
1,001	2,004
1,0001	2,0004

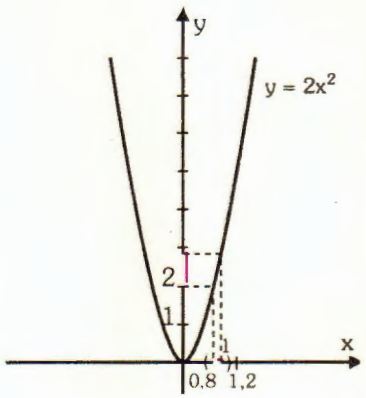


fig. 8

Observamos que los valores de la función tienden a 2 cuando x se acerca a 1 por la izquierda (fig. 7) y por la derecha (fig. 8).

Es decir:

$$\lim_{x \to 1^-} 2x^2 = 2$$

y

$$\lim_{x \to 1^+} 2x^2 = 2$$

luego:

$$\lim_{x \to 1} 2x^2 = 2$$

En general:

f(x) tiende a un limite finito L ($L \varepsilon R$) cuando x tiende a **a** (**a** ε R), si a cada entorno de L de radio ε corresponde un entorno reducido de **a**, tal que f(x) está definida en todo punto

de él y se verifica que a todo punto x del entorno reducido de **a**, corresponde un punto y = f(x) del entorno de L.

Es decir.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

si para todo E (L, ε) ∃ E* (a, δ) ⊂ Dom f tal que

$$\text{si } x \in E^*(a, \delta) \Rightarrow f)x) \in E(L, \varepsilon)$$

Ejemplo 3

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 2}$ (fig. 9)

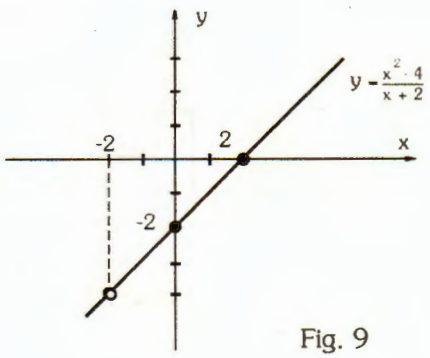


Fig. 9

Dom f: R-{-2}

Tomemos el punto a = -2, que no pertenece al dominio de la función, δ = 0,3 y consideremos el entorno reducido E* (-2, 0,3).
Procediendo como en los ejemplos anteriores, construímos las tablas de valores para x < -2 y x > -2:

x < -2

x	f (x)
-2,1	-4,1
-2,01	-4,01
-2,001	-4,001
-2,0001	-4,0001

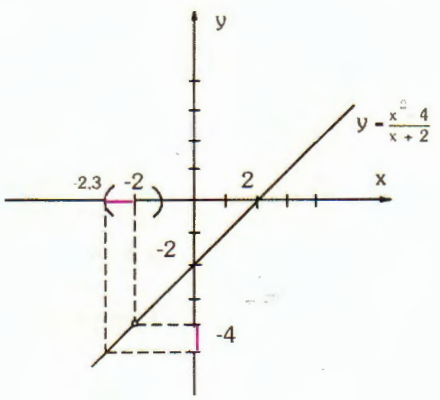


Fig 10

x > -2

x	f (x)
-1,9	-3,9
-1,99	-3,99
-1,999	-3,999
-1,9999	-3,9999

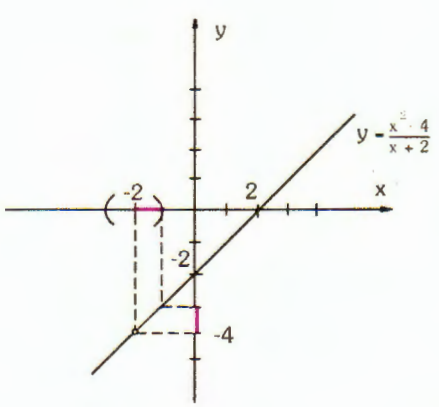


fig. 11

Observamos que los valores de la función tienden a -4 cuando x se aproxima a -2 por la izquierda (fig. 10) y por la derecha (fig. 11).

Es decir: $\lim_{x \to -2^-} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = -4$

luego: $\lim_{x \to -2^+} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = -4$

$$\lim_{x \to -2} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 2}\right) = -4$$

> Observación: Dos funciones que coinciden para todos los valores de x excepto para x = a, tienen el mismo límite para $x \to a$.

Como $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$ es igual a $g(x) = x - 2$, para todo valor de $x \neq -2$, pues:

$$\frac{x^2 - 4}{x + 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x + 2} = x - 2 \quad \text{si } x \neq -2$$

resulta:

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{x + 2} = \lim_{x \to -2} (x - 2) = -4$$

Observemos también que mientras en las funciones de los ejemplos 1 y 2, el límite coincide con el valor de la función en el punto, en el ejemplo 3 el límite coincide con el valor de g(x) en x = -2.

Ejemplo 4

Sea $f: R \to R$ (fig. 12)

dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3 & \text{si } x < 2 \\ 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

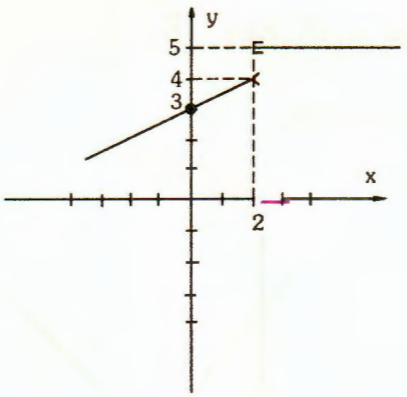


fig. 12

Tomemos el punto a = 2, $\delta > 0$ y consideremos el entorno reducido $E^*(2, \delta)$.
Gráficamente, se ve que la función tiende a 4 cuando x se aproxima por la izquierda a 2 (fig. 13) y tiende a 5 cuando x se aproxima a 2 (fig 14) por la derecha, pues para todos los valores del dominio, mayores o iguales que 2, la función toma constantemente el valor 5.

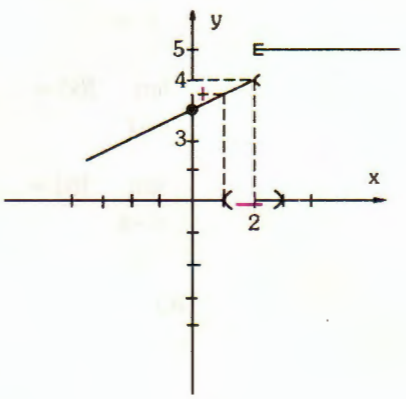


fig. 13

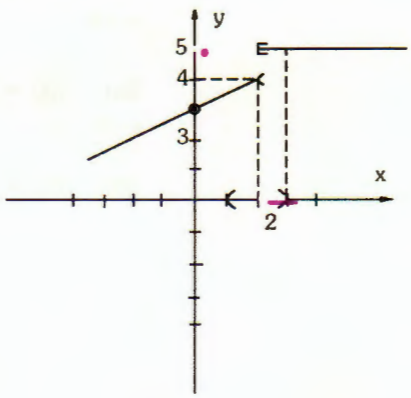


fig. 14

Luego:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

y

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

} NO EXISTE $\lim_{x \to 2} f(x)$

En general:

Si : $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1 \in R$

y $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2 \in R$

y $L_1 \neq L_2$

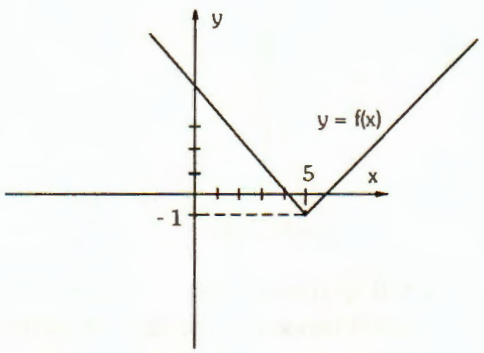
entonces

no existe $\lim_{x \to a^+} f(x)$

Para aplicar (B)

(a) Completar:

a_1)

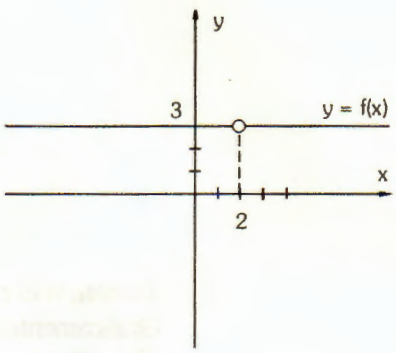


$\lim_{x \to 5^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 5^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 5} f(x) =$ .....

a_2)

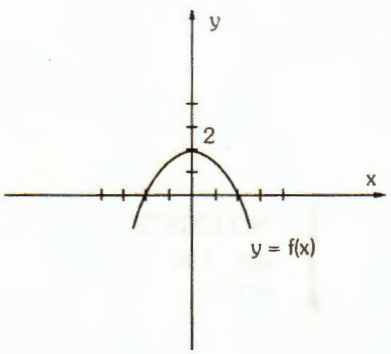


$\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 2} f(x) =$ .....

a_3)

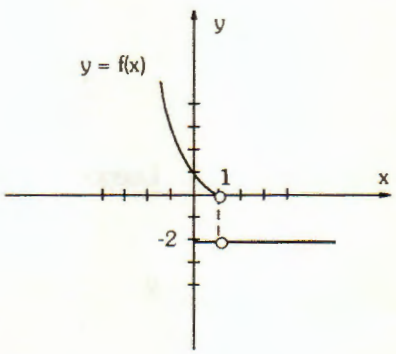


$\lim_{x \to 0^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 0^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 0} f(x) =$ .....

a_4)



$\lim_{x \to 1^+} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 1^-} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to 1} f(x) =$ .....

(b) Calcular los siguientes límites:

b_1) $\lim_{x \to 1} \left(x - \frac{1}{3}\right) =$ .....

b_2) $\lim_{x \to -2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right) =$ .....

$b_3)$ $\lim_{x \to 0} (x^2 - 1) =$ ..... $b_4)$ $\lim_{x \to 6} (3x^2 + x) =$ .....

$b_5)$ $\lim_{x \to -3} \left(\frac{1}{2} - x^3\right) =$ ..... $b_6)$ $\lim_{x \to 1} (x^2 - 2x + 1) =$ .....

$b_7)$ $\lim_{x \to 4} \frac{1}{2x - 1} =$ ..... $b_8)$ $\lim_{x \to \pi} \text{sen } x =$ .....

$b_9)$ $\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{2}{x - 1} =$ ..... $b_{10})$ $\lim_{x \to 0,1} \log x =$ .....

Propiedades de los límites

Las propiedades que se enuncian a continuación, serán de utilidad para el cálculo de límites en casos más complicados que los anteriores.

Sean f y g dos funciones tales que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1$$

y

$$\lim_{x \to a} g(x) = L_2$$

valen entonces las siguientes propiedades:

PROPIEDAD 1: El límite de una suma de dos funciones es igual a la suma de sus límites.
Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = L_1 + L_2$$

Ejemplo

Si $f(x) = x^2 - 4x + 2$ y $g(x) = x - \frac{1}{2}$

entonces:

$$\lim_{x \to 2} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \to 2} f(x) + \lim_{x \to 2} g(x) = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$$

PROPIEDAD 2: El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites.
Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

Ejemplo :

Si $f(x) = 6x$ y $g(x) = 3x - 2$

entonces:

$$\lim_{x \to -1} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to -1} f(x) \cdot \lim_{x \to -1} g(x) = -6 \cdot (-5) = 30$$

PROPIEDAD 3: El límite de la diferencia de dos funciones es igual a la diferencia de sus límites.

Es decir:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x) = L_1 - L_2$$

Ejemplo

Si $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \cos x$

entonces:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) - \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) = 1 - 0 = 1$$

PROPIEDAD 4 : El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, si el límite del denominador es distinto de cero.

Es decir:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \qquad \text{si } L_2 \neq 0$$

Ejemplo

Si $f(x) = 3x$ y $g(x) = x^5 - 5x^2$

entonces

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to 1} f(x)}{\lim_{x \to 1} g(x)} = \frac{3}{-4}$$

Para aplicar (C)

(a) Utilizando las propiedades del límite, enunciadas anteriormente, completar:

$a_1)$ $\lim_{x \to \pi} (\text{sen } x + \text{tg } x) = \lim_{x \to \pi} \text{sen}(x) + \lim_{x \to \pi} \text{tg}(x) =$ ..... + ... = ...

$a_2)$ $\lim_{x \to 2} [\log (x + 8) + \sqrt{x}]$ = ... + ... = ... + ... = ...

$a_3)$ $\lim_{x \to 6} x^{-1} \sqrt[3]{x + 5}$ = ... • ..... = ... • ..... = ...

$a_4)$ $\lim_{x \to 3} (\cos \pi x - x^3)$ = ... • ..... = ... • ..... = ...

$a_5)$ $\lim_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x}{2 + \log x} = \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}} = \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}} =$ .....

$a_6)$ $\lim_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } \frac{\pi x}{3}}{x - 1} = \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}} = \dfrac{\text{.....}}{\text{.....}} =$ .....

(b) Calcular los siguientes límites:

$b_1)$ $\lim_{x \to -1} 3^{2x} =$ .....

$b_2)$ $\lim_{x \to 0} (2 + x)^{(x^2 - 2)} =$ .....

$b_3)$ $\lim_{x \to 8} \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x\right)^{\sqrt[3]{x}} =$ .....

$b_4)$ $\lim_{x \to 3} 2^{\frac{x^2 - 1}{3}} =$ .....

$b_5)$ $\lim_{x \to 3} (\sqrt{x})^{\log (5x - 5)^2} =$ .....

$b_6)$ $\lim_{x \to 3} (3x - x^2)^{1 + \sqrt{x}} =$ .....

Límites infinitos

Dada una función $y = f(x)$ ($f: A \to R$) y un número real a perteneciente o no al dominio de f, hemos estudiado el comportamiento de la función en un entorno reducido del punto a.
En los casos analizados hasta el momento aparecen dos formas distintas de comportamiento correspondientes a las siguientes situaciones:

1°) Existe $L \varepsilon R$ / $\lim_{x \to a} f(x) = L$

2°) No existe $L \varepsilon R$ / $\lim_{x \to a} f(x) = L$, si bien existen

$L_1 \varepsilon R$/ $\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$

y

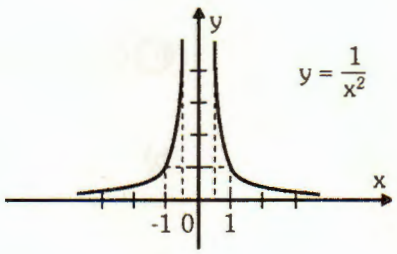
$L_2 \varepsilon R$ / $\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$, es $L_1 \neq L_2$

Veremos en los ejemplos siguientes que existen otros modos de comportamiento de una función, cuando x tiende también a un número real a.

Ejemplo 5

Dada $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (fig 15)

donde Dom f = R - {0}, calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$

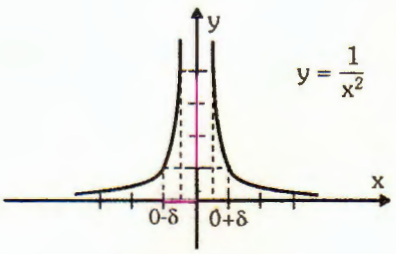


(fig 15)

Como y = f(x) no está definida en x = 0, estudiamos su comportamiento en un entorno del cero.

x < 0

x	f(x)
-0,1	100
-0,01	10000
-0,001	1000000



(fig 16)

$x > 0$

x	f(x)
0,1	100
0,01	10000
0,001	1000000

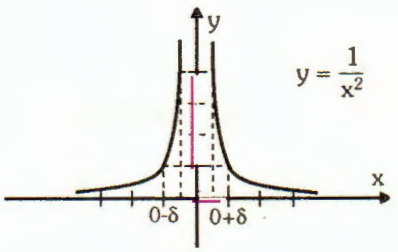


fig. 17

Observamos que a medida que x se acerca por la izquierda a cero (fig. 16) o por la derecha (fig. 17), la función toma valores positivos cada vez más grandes.

Indicaremos este comportamiento de la función escribiendo:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

Ejemplo 6

Dada $f(x) = -\frac{2}{x^2}$ (fig 18)

donde Dom f = R -{0}, calcular $\lim_{x \to 0} f(x)$.

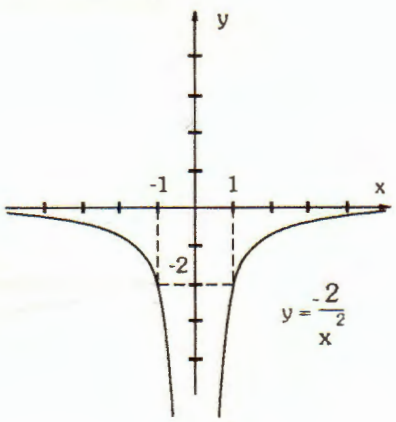


fig. 18

Como y = f(x) no está definida en x = 0, estudiaremos el comportamiento de la función en un entorno reducido del cero.

Gráficamente se ve que a medida que x se aproxima a cero por la izquierda (fig. 19) o por la derecha (fig. 20), la función toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto.

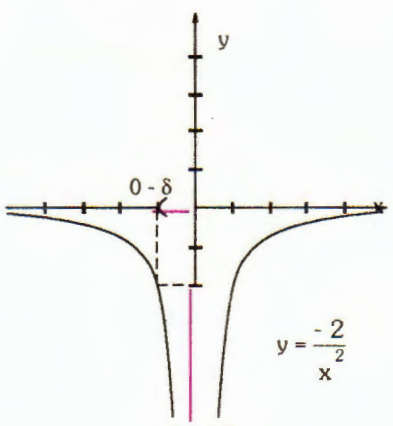


fig 19

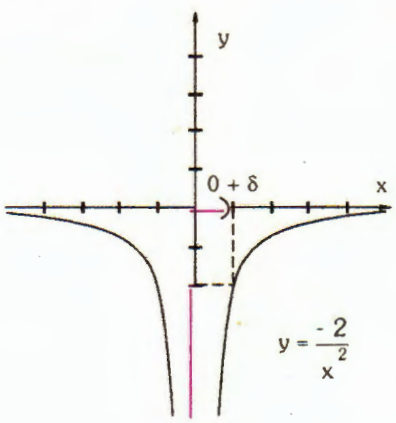


fig. 20

Indicaremos este comportamiento de la función escribiendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{-2}{x^2} = -\infty$$

Ejemplo 7

Dada $f(x) = \frac{1}{x}$ (fig. 21), donde $\lim_{x \to a}$

Dom f= R - {0}, calcular f(x)

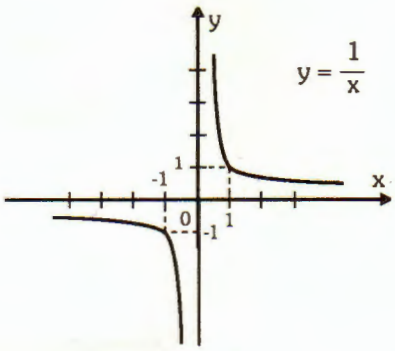


fig. 21

Estudiando la función en un entorno reducido del cero, se ve que a medida que x se aproxima a cero por la izquierda la función toma valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto (fig. 22), mientras que a medida que x se aproxima a cero por la derecha, la función toma valores positivos cada vez más grandes (fig. 23).

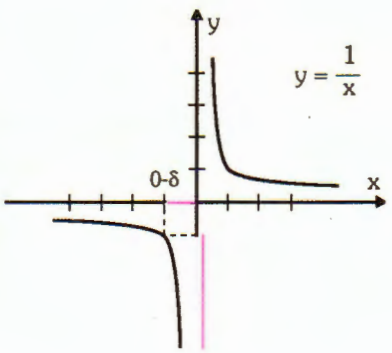


fig. 22

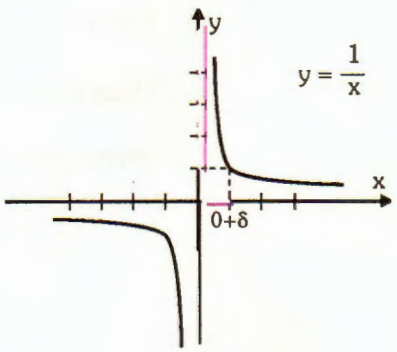


fig. 23

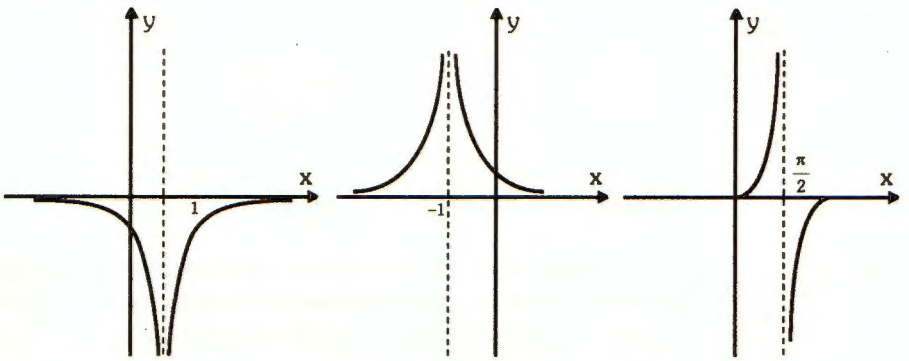
Luego, la función crece indefinidamente en valor absoluto, cuando x tiende a cero.

Indicaremos este comportamiento de la función, escribiendo:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Para aplicar (D)

(a) Completar



$\lim_{x \to 1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim_{x \to -1} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

(d) Calcular los siguientes límites:

$b_1)\ \lim_{x \to 0} \left(\frac{5}{x}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_2)\ \lim_{x \to 2} \frac{3x}{x - 2} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_3)\ \lim_{x \to 0} \frac{-3}{x} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

$b_4)\ \lim_{x \to 2} \frac{x + 1}{2x - 4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

LÍMITE PARA $x \to \infty$

Estudiaremos el comportamiento de una función, no en el entorno de un punto sino, cuando x crece indefinidamente.

Ejemplo 8

a) Sea $f: R \to R / f(x) = 2x + 1$.
En la figura 24 se ve que a medida que x crece indefinidamente, tomando valores positivos cada vez más grandes, la función también toma valores positivos cada vez más grandes
Escribimos entonces

$$\lim_{x \to +\infty} (2x + 1) = +\infty$$

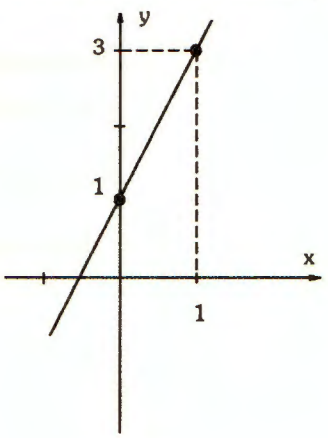


fig. 24

Análogamente, si x decrece indefinidamente, tomando valores negativos cada vez mayores en valor absoluto, la función toma también valores negativos cada vez más grandes en valor absoluto.

Escribimos entonces:

$$\lim_{x \to -\infty} (2x + 1) = -\infty$$

b) Sea f: $R \to R$ / $f(x) = x^2 - 3$

En la figura 25 se ve que, si x crece indefinidamente, tomando valores positivos cada vez más grandes o decrece indefinidamente tomando valores negativos cada vez mayores en valor absoluto, la función crece tomando cada vez valores positivos más grandes.

Escribimos entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^2 - 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^2 - 3) = +\infty$$

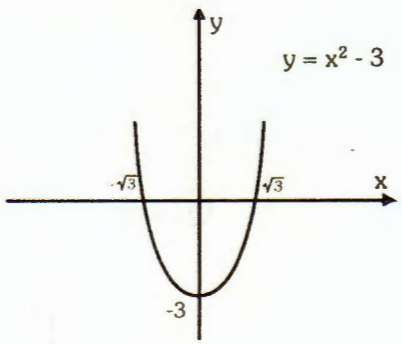


fig. 25

Ejemplo 9

Dada $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

calcular:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$

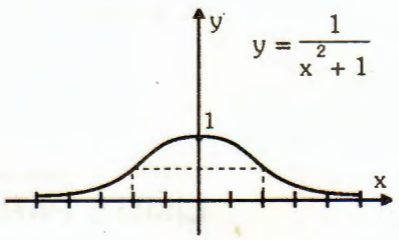


fig. 26

Observamos que si x crece indefinidamente en cualquiera de los dos sentidos, el denominador $x^2 + 1$ también crece indefinidamente, luego la expresión $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ toma valores positivos cada vez más pequeños, acercándose indefinidamente al valor 0 (fig. 26).

Entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

y

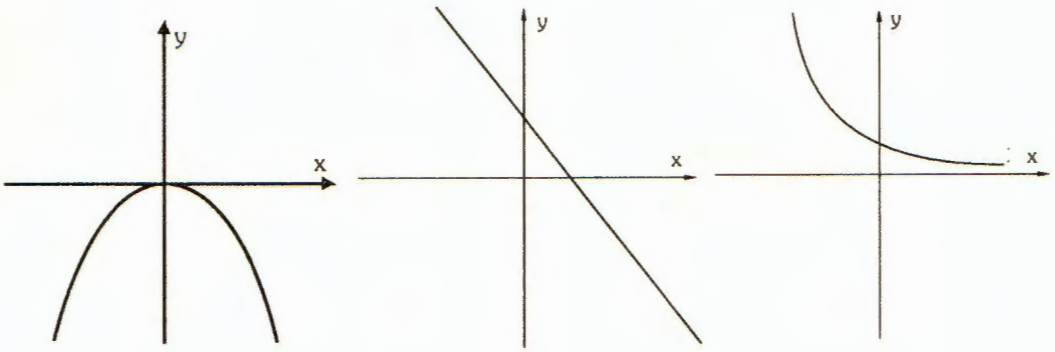
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

luego:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

Para aplicar (E)

(a) Completar:



$\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x \to +\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ .....

$\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x \to -\infty} f(x) =$ ..... $\lim_{x \to \infty} f(x) =$ .....

(b) Calcular los siguientes límites:

$b_1) \lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} =$ .....

$b_2) \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x^3} =$ .....

$b_3) \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3} x^{-2} =$ .....

$b_4) \lim_{x \to \infty} (x^2 + 2) =$ .....

$b_5) \lim_{x \to +\infty} (2 - x) =$ .....

$b_6) \lim_{x \to \infty} \left(3 - \frac{5}{x^2}\right) =$ .....

Límites indeterminados

Muchas veces la aplicación directa de las propiedades del límite conduce a expresiones indeterminadas.
En estos casos, el límite de una función, si existe, no está determinado por los límites de las funciones que la componen.

Ejemplo 10

Calcular $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} =$ .....

Observemos que $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ no está definida en $x = 1$ y que el reemplazo directo del valor $x = 1$, en la función, nos conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pues $\lim \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$ (carece de sentido aritmético).

Sin embargo el límite de f(x) existe. Para calcularlo debemos tener en cuenta que si $x \neq 1$,

entonces $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$

pues, factoreando y simplificando

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1}$$

resulta:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

Ejemplo 11

Calcular $\lim_{x \to +\infty} (5x^3 - 2x)$

La aplicación directa de la propiedad correspondiente al límite de una diferencia, nos conduce a la forma indeterminada $\infty - \infty$

Sin embargo el límite existe. Para calcularlo extraemos como factor común el término de mayor grado:

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^3 - 2x) = \lim_{x \to +\infty} 5x^3 \left(1 - \frac{2x}{5x^{3\,2}}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} 5x^3 \cdot \lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{5x^2}\right)$$

como:

$$\lim_{x \to +\infty} 5x^3 = +\infty$$

y

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{2}{5x^2}\right) = \lim_{x \to +\infty} 1 - \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{5x^2} = 1 - 0 = 1$$

entonces:

$$\lim_{x \to +\infty} (5x^3 - 2x) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

Observación: El límite para $x \to +\infty$ de un polinomio en x, es igual al límite para $x \to +\infty$ del término de mayor grado.

Análogamente para $x \to -\infty$.

Ejemplo 12

Calcular $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^2 + 3}{2x^3 + x}\right) =$

La aplicación directa de la propiedad correspondiente al límite de un cociente de funciones conduce a la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$

Pero, teniendo en cuenta la observación anterior:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{5x^2 + 3}{2x^3 + x}\right) = \frac{\lim_{x \to -\infty} 5x^2\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \to -\infty} 2x^3\left(1 + \frac{x}{2x^3\ 2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{5}{2x} = 0$$

Aclaración: Además de estas tres formas indeterminadas: $\frac{0}{0}, \infty - \infty, \frac{\infty}{\infty}$ existen otras: $0 . \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ .

Límite de $\frac{\text{sen } x}{x}$ para $x \to 0$

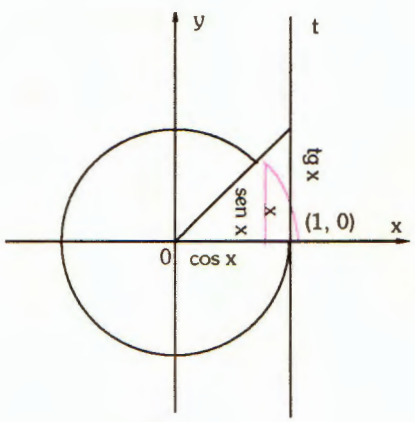
La aplicación directa de la propiedad del límite de un cociente de funciones, conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pues:

$\lim_{x \to 0}$ sen x = 0 y $\lim_{x \to 0}$ x = 0

Sin embargo, existe $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}$ y ese límite es igual a 1.

Consideremos un ángulo cuya medida en radianes sea x, siendo $0 < x < \frac{\pi}{2}$

luego:



sen x < x < tg x (fig. 27).

y como sen x ≠ 0, dividiendo por sen x:

$$\frac{\cancel{\text{sen } x}}{\cancel{\text{sen } x}} < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{\cancel{\text{sen } x}}{\cos x \cdot \cancel{\text{sen } x}}$$

resulta:

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}$$

por lo tanto:

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x$$

o bien:

$$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$$

y como $\lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} 1 = 1$, resulta:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1 \quad (1)$$

ACLARACIÓN: Para establecer la igualdad (1), se ha utilizado el siguiente teorema:

"Si f y g son dos funciones tales que,

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$$

y h es otra función tal que para todo x próximo a a verifica

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

entonces, existe el limite de h(x) cuando x tiende a a y ese límite es igual a L".

Observemos que para obtener el límite (1), hemos supuesto $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Si ahora consideramos

$$-\frac{\pi}{2} < x < 0$$

resulta

$$0 < -x < \frac{\pi}{2}$$

entonces por ser $-x > 0$, aplicando el caso anterior:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } (-x)}{-x} = 1$$

pero:

$$\frac{\text{sen } (-x)}{-x} = \frac{-\text{ sen } x}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x}$$

luego si $x \neq 0$ es

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$$

La determinación del límite de $\frac{\text{sen } x}{x}$ para $x \to 0$, permite resolver otros casos de indeterminaciones. Así, por ejemplo, pueden resolverse las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$, que se presentan en el reemplazo directo de x por cero, en el cálculo de los siguientes límites:

1) $$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{\lim_{x \to 0} 1}{\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{tg } x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\text{sen } x}{\cos x}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

3) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } m\,x}{m\,x} = \lim_{m\,x \to 0} \frac{\text{sen } m\,x}{m\,x} = 1$$

Para aplicar (F)

(a) Calcular los siguientes límites:

a_1) $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} =$ .....

a_2) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + x}{x} =$ .....

a_3) $\lim_{x \to +\infty} (2x^4 + 5x^2 - 3) =$ .....

a_4) $\lim_{x \to -\infty} (x^5 + x^2 - x) =$ .....

a_5) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^3} =$ .....

a_6) $\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{3x^5 + 4x^3 - x + 1}{x^4 - 4x^2 + x} \right) =$ .....

ⓑ Completar:

$b_1)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{5x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \ldots\ldots$

$b_2)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{3x} = \ldots\ldots$

$b_3)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \ldots\ldots$

$b_4)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^5} = \ldots\ldots$

$b_5)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \operatorname{sen} 3x}{3x} = \lim_{x\to 0} 3 \cdot \frac{\operatorname{sen} 3x}{x} = \ldots\ldots$

$b_6)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{x} = \ldots\ldots$

$b_7)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 4x}{5x} = \ldots\ldots$

$b_8)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 8x}{4x} = \ldots\ldots$

PARA EJERCITAR

10. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 3} \left(x^2 + \sqrt[5]{10x + 2}\right) = \ldots\ldots$

b) $\lim_{x\to -1} \left(x^3 \sqrt{x + 2}\right) = \ldots\ldots$

c) $\lim_{x\to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 3x) = \ldots\ldots$

d) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \frac{3}{1 - 2x} = \ldots\ldots$

e) $\lim_{x\to \pi} (\cos x - 3) = \ldots\ldots$

f) $\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{\log_2 (6 + x^2)}{x^5} =$ .....

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^5 + 5x}{2x^2 - x} =$ .....

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} =$ .....

c) $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2 + x} =$ .....

d) $\lim_{x \to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x - 3} =$ .....

e) $\lim_{x \to -1} \frac{x^4 - 1}{x^5 + 1} =$ .....

f) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} =$ .....

g) $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 7x + 3}{2x^2 - 5x + 2} =$ .....

h) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 9} =$ .....

i) $\lim_{x \to -2} \frac{x^5 + 32}{x^2 - 4x - 12} =$ .....

j) $\lim_{x \to -1} \frac{3x + 3}{x^2 + 2x + 1} =$ .....

k) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 3} - \sqrt{3}}{x} =$ .....

l) $\lim_{x \to 1} \frac{2x - 2}{\sqrt{x} - 1} =$ .....

m) $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1} =$ .....

12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^2 x}{x} =$ .....

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}5\,x}{3\,x} =$ .....

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^3 4\,x}{x} =$ .....

d) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 5\,x}{\text{tg } 3\,x} =$ .....

e) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \text{sen } x}{1 - \text{sen}^2 x} =$ .....

f) $\lim_{x \to 0} \frac{3\,x}{\text{tg } 6\,x} =$ .....

g) $\lim_{x \to 0} \frac{x \,.\, \text{tg } x}{\text{sen } x} =$ .....

h) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4\,x \,.\, \text{tg}^3 x}{x^4} =$ .....

i) $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\text{sen } x} + \frac{\text{tg } x}{2\,x}\right) =$ .....

j) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}^3 (x - 2)}{x - 2} =$ .....

k) $\lim_{x \to 0} \frac{3 \text{ sen } 6\,x}{\text{sen } 9\,x} =$ .....

13. Hallar a ε R que verifique:

a) $\lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -4$ .....

b) $\lim_{x \to a} (x^2 + 4\,x - 3) = 2$ .....

c) $\lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{2}x^2 + 3x\right) = 0$ .....

d) $\lim_{x \to a} \log x = 2$ .....

e) $\lim_{x \to a} \frac{5}{x - 1} = \infty$ .....

f) $\lim_{x \to a} \cos x = \frac{1}{2}$ .....

6.3 CONTINUIDAD

Intuitivamente podemos decir que una función es continua, si su gráfica puede obtenerse de un solo trazo. Así, una función como la representada en la figura 28 es continua, mientras que la función representada en la figura 29 no lo es, pues su gráfica se interrumpe al producirse un "salto" en los valores de la función.

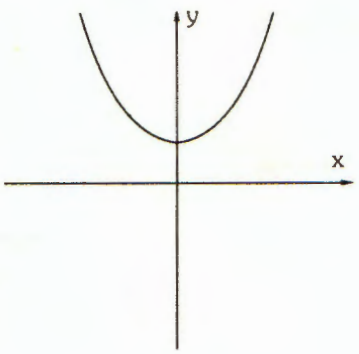


fig. 28

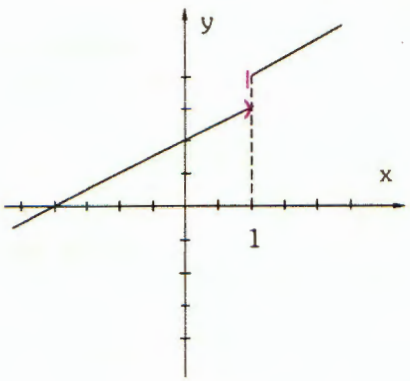


fig. 29

Más precisamente, decimos que:

f es continua en x = a, si

1°) Existe $L = \lim_{x \to a} f(x)$ $\quad (L \in R)$

2°) Existe $f(a) \in R$

3°) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Ejemplo 1

Estudiemos la continuidad de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en x = 1 (fig. 30)

1°) $\lim_{x \to 1} (x^2 + 2x + 1) = 4$

2°) $f(1) = 4$

3°) $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 4$

Luego, f(x) es continua en x = 1.

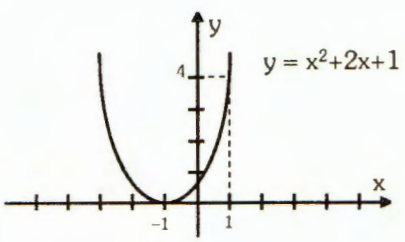


fig. 30

Ejemplo 2

Estudiemos la continuidad de $f(x) = \frac{1}{x}$

(fig.31) en x=0.

Como $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$

entonces, no existe L ε R tal que

$\lim_{x \to 0} f(x) = L$

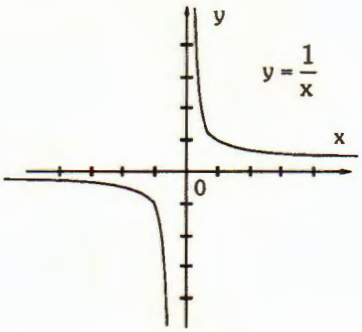


fig. 31

Luego f(x) no es continua en x = 0 pues no cumple la primera condición de continuidad.

Ejemplo 3

Estudiemos la continuidad de f (fig. 32) en x = 2, siendo:

$$f(x) \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \neq 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

1°) $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$

2°) $f(2) = -1$

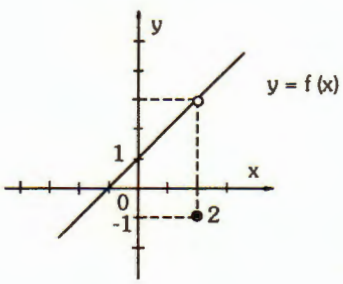


fig. 32

3°) $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

luego, f(x) no es continua en x = 2 pues no se cumple la tercera condición de continuidad.

Decimos entonces que f es discontinua en x = 2, o bien que x = 2 es un punto de discontinuidad de f.

Ejemplo 4

Estudiemos la continuidad de f (fig. 33) en x = 1, siendo

$$f(x) \begin{cases} 2x & \text{si } x > 1 \\ -x^2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Observemos que no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$, pues:

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$ y $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -1$

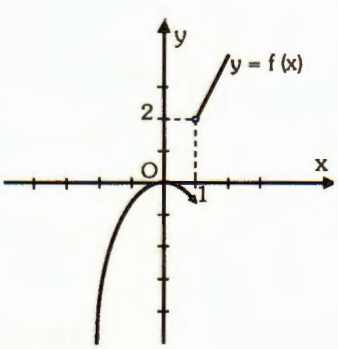


fig. 33

luego, f no es continua en x = 1, pues no se cumple la primera condición de continuidad. En cambio para los demás valores de su dominio es continua.

Continuidad en un intervalo abierto

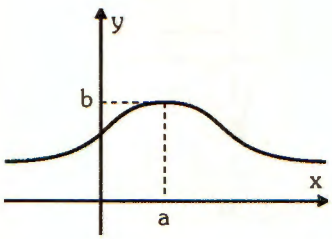
Si I ⊂ Dom f es un intervalo abierto (a, b), (a, + ∞), (-∞,b) ó (- ∞, ∞) decimos que f es continua en I si para todo x_0 ε I es f continua en x = x_0.

Así, por ejemplo, la función de la figura 33 es continua en (1, +∞)

Para aplicar (G)

(a) Completar analizando las condiciones de continuidad en x = a.

a_1)

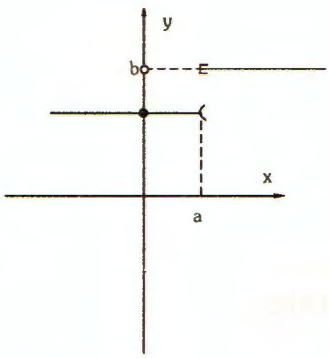


1° .....

2° .....

3° .....

a_2)

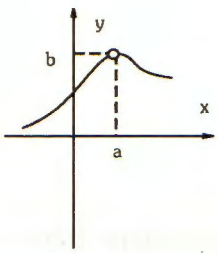


1° .....

2° .....

3° .....

a_3)

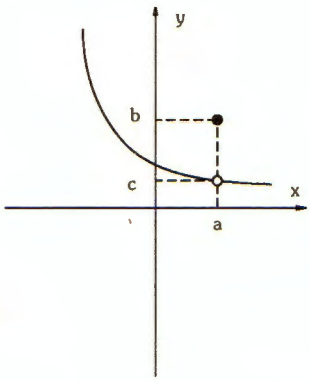


1° .....

2° .....

3° .....

a_4)



1° .....

2° .....

3° .....

(b) Responder V o F. Justificar.

b_1) $f(x) = \frac{1}{x - 3}$ es continua en x = 3 .....

b_2) $f(x) = \frac{4}{x^2}$ es continua en x = 2 .....

b_3) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 1}$ es continua en x = -1 .....

b_4) f(x) = cotg x es continua en x = 0 .....

b_5) f(x) = log x es continua en x = 1 .....

Asíntotas

Se llaman asíntotas de una función a las rectas a las cuales se aproxima indefinidamente dicha función.

Asíntotas verticales

Decimos que la función y = f(x) tiene una asíntota vertical en x = a si:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \text{ o } \lim_{x \to a} f(x) = -\infty \text{ o } \lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

La función y = f(x) (fig. 34) tiene una asíntota vertical en x = a

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

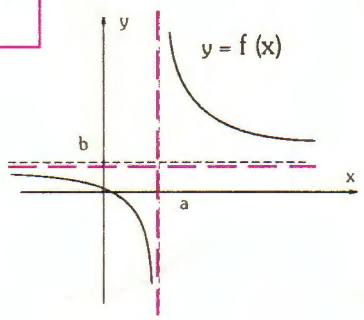


fig. 34

Asíntotas horizontales

Decimos que la función y = f(x) tiene una asíntota horizontal en y = b si:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \text{ o } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \text{ o } \lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

La función y = f(x) (fig. 34) tiene una asíntota horizontal en y = b ($\lim_{x \to \infty} f(x) = b$) .

Asíntotas oblicuas

Decimos que la función y = f(x) tiene una asíntota oblicua (fig. 35) y = mx + b si la diferencia f(x) - (mx + b) tiende a cero cuando $x \to -\infty$ o $x \to +\infty$ o $x \to \infty$.

Para obtener la ecuación de la asíntota debemos hallar la pendiente m y la ordenada al origen b:

Como $\lim_{x \to \infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$

dividiendo por x:

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x) - (mx + b)}{x} \right] = 0$$

bien: $$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - m - \frac{b}{x} \right] = 0$$

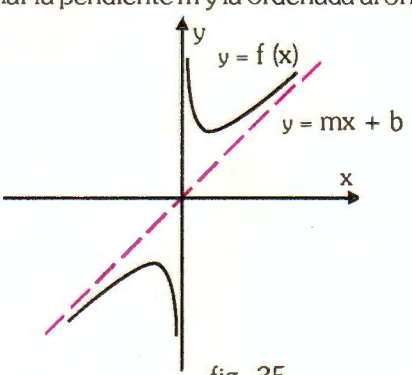


fig. 35

resulta:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{pues} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{b}{x} = 0$$

Calculado m, obtenemos b de $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - mx - b] = 0$

es decir:

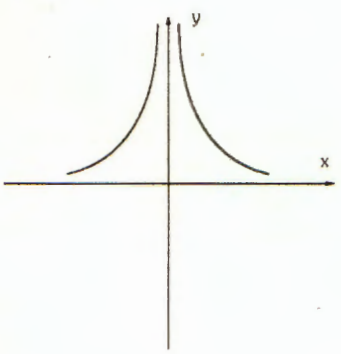
$$\lim_{x \to \infty} (f(x) - mx) = b$$

Observación: Las asíntotas horizontales son un caso particular de las oblicuas con pendiente igual a cero.

Para aplicar (H)

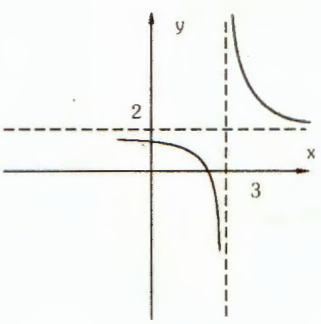
(a) Completar, escribiendo en cada caso la ecuación de la asíntota correspondiente:

a_1)



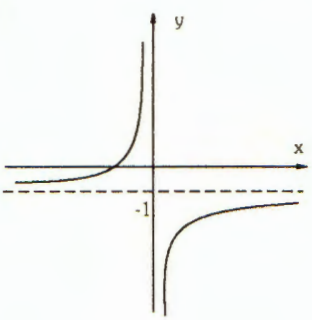
A. horizontal .....
A. vertical .....

a_2)



A. horizontal .....
A. vertical .....

a_3)

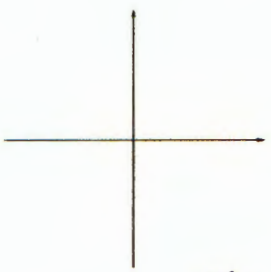


A. horizontal .....
A. vertical .....

(b) Completar:

b_1) $f(x) = \dfrac{2}{x - 1}$

	BÚSQUEDA
A. horizontal	$\lim_{x \to 1} \frac{2}{x-1}$ = ... ⇒ .....
A. vertical	$\lim_{x \to \infty} \frac{2}{x-1}$ = ... ⇒ .....
A. oblicua	.....



gráfico

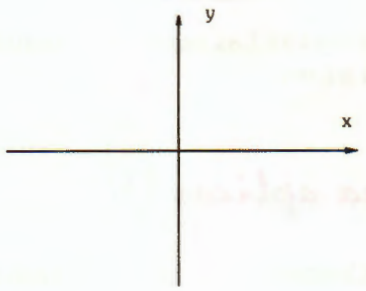
$b_2)\ f(x) = \dfrac{3x + 2}{5 - x}$

A. horizontal $\lim_{x \to}$ ....

A. vertical $\lim_{x \to}$ ....

A. oblicua ....

Gráfico:



$b_3)\ f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 1}$

A. horizontal $\lim_{x \to}$ ....

A. vertical $\lim_{x \to}$ ....

A. oblicua .....

.....

.....

Gráfico:

Para Ejercitar

14. Hallar los puntos en que no son continuas las funciones del ejercicio 8.

.....

.....

.....

15. Hallar los puntos en que no son continuas f(x) = tg x y g (x) = cosec x.

.....

.....

.....

16. Dada f(x) = |x|, trazar la gráfica de la función y analizar la continuidad en x = 0.

.....

.....

.....

.....

17. Dada $f(x) = \frac{|x|}{x}$, hallar los puntos de discontinuidad de la función. Graficar.

.....

.....

.....

.....

18. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en (-1, 1).

a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 4x}$ .....

.....

b) $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ .....

.....

c) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^4 - 1}$ .....

.....

d) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$ .....

.....

19. Determinar puntos de discontinuidad y asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + x}$ .....

.....

b) $f(x) = \frac{3x - 3}{1 + x}$ .....

.....

c) $f(x) = \frac{2}{4x^2 - 4}$ .....

.....

d) $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$ .....

.....

e) $f(x) = \frac{2x^2 + 5}{x - 1}$ .....

.....

f) $f(x) = + \sqrt{x}$ .....

.....

20. Trazar la gráfica de la función y = E (x) = [x] (que indica que y es la parte entera de x, es decir, y es el mayor entero que es menor o igual que x; así por ejemplo es E (2,5) = 2, E (-6,4) = - 7). Analizar los puntos de discontinuidad.

.....

.....

.....

21. Dada f(x) = [x] - x con Dom f = R, trazar su gráfica y determinar si es continua en a) (0, 1) , b) (-1, 1).

.....

.....

.....

.....

22. Hallar los puntos en que $f(x) = \frac{\text{sen } x}{1 + \text{sen } x}$ es discontinua en $\left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

.....

23. Elegir la opción verdadera. Justificar verificando la elección.

a) $f(x) = \frac{x^3 - 2}{4x^2 + 4}$

.....

.....

.....

asíntota: $y = \frac{1}{4}x$; $y = -\frac{1}{4}x$; $x = -1$

b) $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x}$

.....

.....

.....

asíntota: $y = x - 5$; $x = 0$; $y = x + 3$

c) $f(x) = \frac{x^4 - 2x^2}{x^2 - 2}$

.....

.....

.....

asíntota: $y = 1$; $x = -\sqrt{2}$; $x = \sqrt{2}$

24. Determinar si cada una de las siguientes funciones es continua en el punto x_0 indicado en cada caso.

a) $f(x) \quad \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$

.....

.....

b) $f(x) \quad \begin{cases} x - 4 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$

.....

.....

c) $f(x) \quad \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{x + 1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$

.....

.....

d) $f(x) \begin{cases} \dfrac{x^2 - 25}{x - 5} & \text{si } x \neq 5 \\ 10 & \text{si } x = 5 \end{cases}$, $x_0 = 0$

.....

.....

25 Determinar una de las infinitas funciones posibles que tiene por asíntotas a las rectas $y = 1$ y $x = -2$.

.....

PARA RECORDAR

CONTINUIDAD

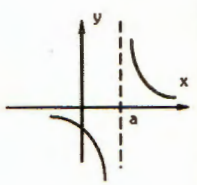
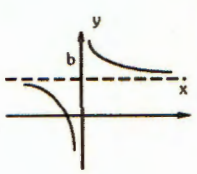
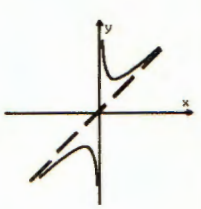
f es continua en x = a, si:

1° Existe $L = \lim_{x \to a} f(x)$ $(L \varepsilon R)$

2° Existe $f(a) \varepsilon R$

3° $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

ASÍNTOTAS DE $y = f(x)$

ASÍNTOTA	BÚSQUEDA	ECUACIÓN	GRÁFICO
VERTICAL	$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ $+\infty$ $-\infty$	$x = a$	
HORIZONTAL	$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ $+\infty$ $-\infty$	$y = b$	
OBLÍCUA	$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$ $\lim_{x \to \infty} [f(x) - m x] = b$	$y = mx + b$	

GUIA DE ESTUDIO VII

7.1 Derivada

Para aplicar (A, B, C, D, E y F)
Para ejercitar (Ejercicios n° 1 al 20)

7.2 Variación de las funciones

Para aplicar (G, H e I)

7.3 Problemas

Para ejercitar (Ejercicios n° 21 al 32)

Para recordar

Recta tangente a una curva C en un punto P

Dada una curva C y un punto P, perteneciente a ella, elegimos sobre C un punto Q, distinto de P.

P y Q determinan una recta secante a la curva C (fig. 1).

Si Q se "mueve" sobre C "acercándose" a P, la recta s "se aproxima" a la recta t.

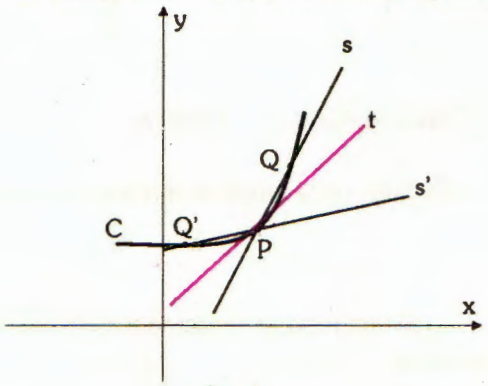


fig. 1

De la misma manera la recta s', determinada por P y Q', se "aproxima" a t cuando Q' se "acerca" sobre la curva a P.

La recta t es la tangente a la curva C en el punto P.

Así, queda definida la recta tangente a la curva C en P, como la posición límite a la cual tienden las secantes por la derecha y por la izquierda del punto P.

Observación: La tangente no siempre existe, aún en el caso en que la función sea continua.

Ejemplo 1

Sean C_1, C_2 y C_3 las curvas de las figuras 2, 3 y 4 respectivamente

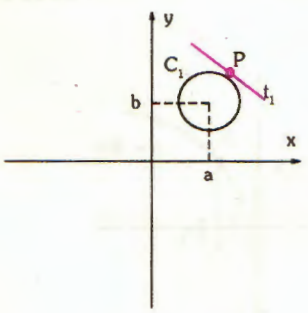


fig. 2

t_1 es tangente a C, en P (único punto en común con la curva).

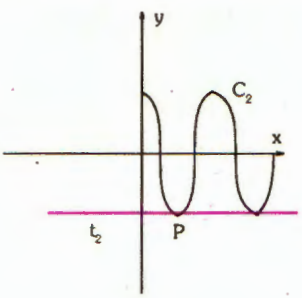


fig. 3

t_2 es tangente a C_2 en P (C_2 y t_2 tienen infinitos puntos en común).

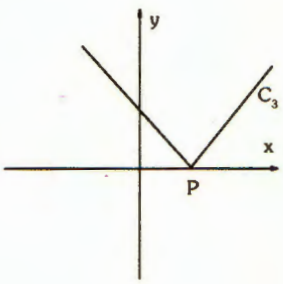


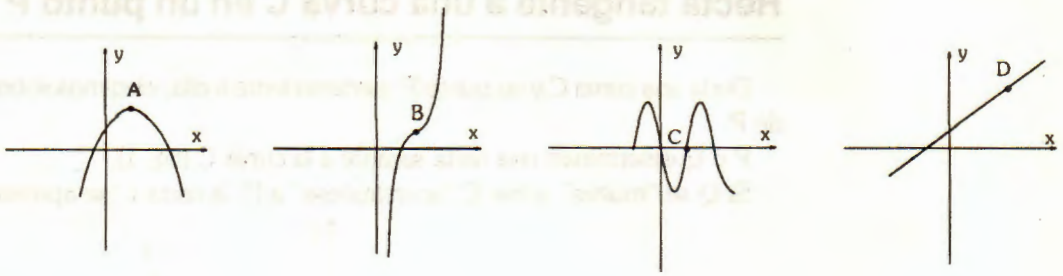
fig.4

no existe tangente a C_3 en P.

Observemos que no existe tangente a C_3 en P, pues la posición límite a la cual tienden las secantes es distinta según se aproximen por la derecha o por la izquierda de P.

Para aplicar (A)

(a) Trazar las tangentes a las siguientes curvas en los puntos indicados:



(b) Responder V o F. Justificar.

b_1) Toda recta tangente a una elipse tiene un solo punto en común con la curva. .....

.....

b_2) Si una recta es tangente a una sinusoide, entonces tiene infinitos puntos en común con la curva. .....

b_3) Toda recta que tiene un solo punto en común con una curva es tangente a la misma en dicho punto. .....

b_4) Algunas rectas tangentes a una curva tienen un solo punto en común con dicha curva.

.....

Derivada de una función en un punto

Sea f una función definida en el intervalo (a , b) y P un punto de coordenadas $(x_0; y_0)$ tal que $x_0 \in (a, b)$ y $f(x_0) = y_0$ (fig 5)

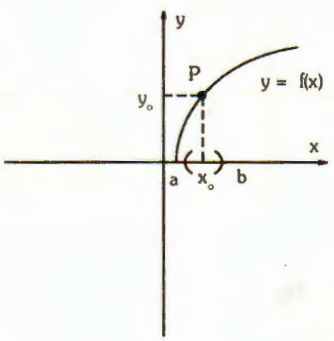


fig. 5

Si damos a x_0 un incremento Δx_0 suficientemente pequeño de manera tal que $x_0 + \Delta x_0$ pertenezca al (a, b), entonces al pasar de x_0 a $x_0 + \Delta x_0$ la función también se incrementa. Llamando Δy_0 al incremento de la función, resulta:

$$f(x_0 + \Delta x_0) = y_0 + \Delta y_0 \quad \text{(fig. 6)}$$

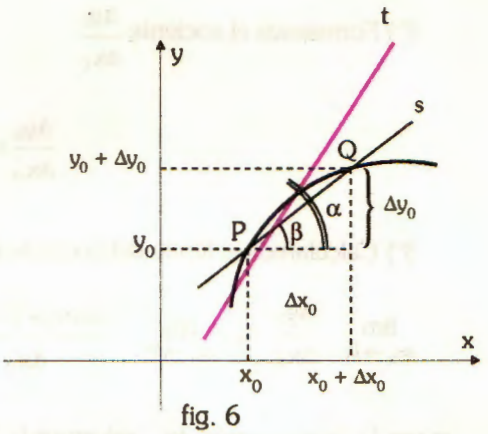


fig. 6

Como el incremento Δx_0 se ha tomado suficientemente pequeño, el punto Q de coordenadas $(x_0 + \Delta x_0 ; y_0 + \Delta y_0)$, perteneciente a la gráfica de la función, resulta muy próximo a P y esta proximidad de Q a P será mayor cuanto menor sea Δx_0.

Luego, si $\Delta x_0 \to 0$, Q se "moverá" sobre la curva hacia P y la secante s determinada por dichos puntos tenderá a la recta tangente t.

Observemos que cuando s tiende a t, ß tiende a α (fig. 6) y por consiguiente la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la recta tangente.

Es decir:

$$\text{pend. de s} = \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \text{pend. de s} = \text{tg } \alpha = \text{pend. de t}$$

luego:

$$\text{pend. de t} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

bajo la condición de que el límite exista.

Llamamos $f'(x_0)$ a la pendiente de la recta tangente a f(x) en el punto de abscisa x_0:

$$f'(x_0) = \text{pend. de t} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

$f'(x_0)$ es la derivada de f en el punto x_0.

Ejemplo 2

Obtener la derivada de $f(x) = x^2$ en $x_0 = 3$.

1°) Calculamos el incremento Δy_0

$$f(x_0 + \Delta x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 = (3 + \Delta x_0)^2 = 9 + 6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2$$

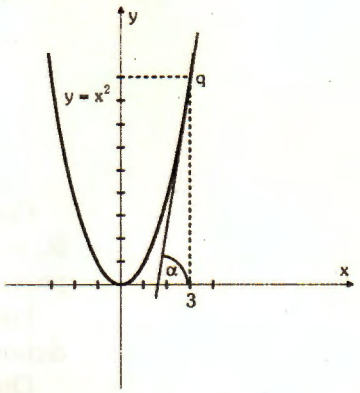
$$\Delta y_0 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \cancel{9} + 6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2 - \cancel{9} = 6\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2$$

2°) Formamos el cociente $\frac{\Delta y_0}{\Delta x_C}$

$$\frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \frac{6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0}$$

3°) Calculamos el límite del cociente de incrementos para $\Delta x_0 \to 0$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{6\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0}$$



sacando factor común Δx_0, salvamos la indeterminación

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta y_0}{\Delta x_C} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{\Delta x_0\,(6 + \Delta x_0)}{\Delta x_0} = 6$$

luego: $f'(3) = 6 \Rightarrow \text{tg}\ \alpha = 6$

Para aplicar (B)

(a) Completar:

$a_1)$ $f(x) = x^2 + 4;\ x_0 = -1$ .....

$f(x_0 + \Delta x_0) =$ .....

$f(x_0) =$ .....

$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$ .....

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$f'(x_0) =$ .....

$a_2)$ $f(x) = -x^2 + 2x\ ;\ x_0 = 3$ .....

$f(x_0 + \Delta x_0) =$ .....

$f(x_0) =$ .....

$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$ .....

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$f'(x_0) =$ .....

$a_3)$ $f(x) = x^3$; $x_0 = 1$ .....

$f(x_0 + \Delta x_0) =$ .....

$f(x_0) =$ .....

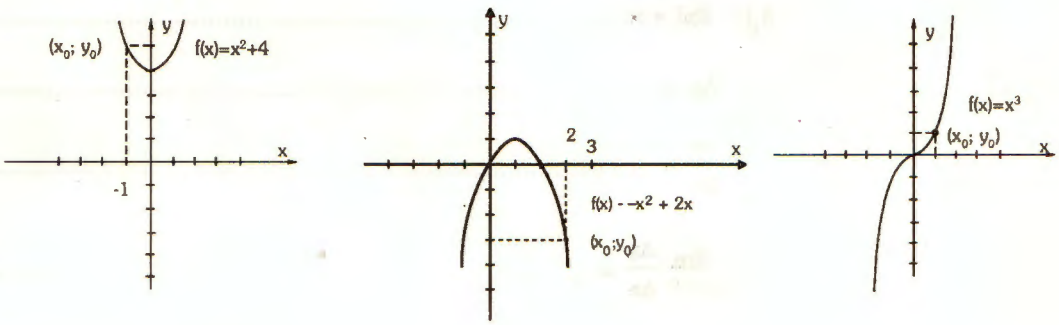
$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) =$ .....

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \text{.....}$$

$f'(x_0) =$ .....

(b) Dadas las gráficas de las funciones correspondientes a la parte a) trazar en cada caso la tangente en $(x_0; y_0)$.



Cálculo de derivadas

Hasta ahora hemos calculado la derivada de una función en un punto x_0 perteneciente a un intervalo (a, b).

Si x es un punto cualquiera del (a, b) y Δx es un incremento positivo o negativo suficientemente pequeño de manera tal que $x + \Delta x$ pertenezca al intervalo (a, b), llamamos derivada de f al límite cuando $\Delta x \to 0$ del cociente de incrementos, siempre que ese límite exista.

Es decir:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1)$$

Observamos que si f tiene derivada en cada punto x, es decir, si el límite (1) existe, se obtiene a partir de f una nueva función que hace corresponder a cada valor de x la derivada de f(x). Esta función, así definida, se designa por f' (x).

Ejemplo 3

Obtener la derivada de la función constante $f(x) = c$.

Como f es constante es: $f(x + \Delta x) = c$

luego:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{c - c}{\Delta x} = 0$$

entonces:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

Por lo tanto: **La derivada de la función constante es cero**

Para aplicar ©

ⓐ Completar:

$a_1)$ $f(x) = x$ .....

$\Delta y =$ .....

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ .....

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ .....

$f'(x) =$ .....

$a_2)$ $f(x) = x^2$ .....

$\Delta y =$ .....

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$ .....

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$ .....

$f'(x) =$ .....

En general:

Si $f(x) = x^n$ es $f'(x) = n \cdot x \cdot n^{n-1}$ para todo $n \in N$

Este resultado vale también si el exponente es un número real, es decir:

Si $f(x) = x^a$ $(x>0)$ es $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$ para todo $a \in R$

(b) Calcular f'(x), en cada uno de los siguientes casos, aplicando la fórmula anterior.

$b_1)$ $f(x) = \sqrt{x}$ .....

$b_2)$ $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .....

$b_3)$ $f(x) = x^{-4}$ .....

$b_4)$ $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$ .....

$b_5)$ $f(x) = \frac{1}{x^6}$ .....

(c) Completar:

$c_1)$ $f(x) = \text{sen } x$

$f(x + \Delta x) - f(x) =$ .....

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ .....

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ .....

$f'(x) =$ .....

$c_2)$ $f(x) = \cos x$

$f(x + \Delta x) - f(x) =$ .....

$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ .....

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$ .....

$f'(x) =$ .....

Si $f(x) = \text{sen } x$ entonces $f'(x) = \cos x$.

Si $f(x) = \cos x$ entonces $f'(x) = -\text{sen } x$.

Tabla de derivadas

A partir de la definición de derivada es posible calcular siempre que exista la derivada de cualquier función.

En la tabla siguiente aparecen algunas derivadas elementales. A partir de éstas y utilizando las reglas de derivación, es posible calcular otras derivadas sin necesidad de recurrir a su definición.

f(x)	f' (x)
c	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^a $(x>0)$	$a\,x^{a-1}$
sen x	cos x
cos x	- sen x
ln x	$\frac{1}{x}$
log x	$\frac{1}{x}\log e$
a^x	$a^x \ln a$
e^x	e

Reglas de derivación

Derivada del producto de una constante por una función

Si y = f(x) es una función derivable en un intervalo (a, b) y c es una constante, entonces c. f (x) es también derivable y se cumple:

Es decir:

$$(c.f\,(x))' = c.f'(x)$$

La derivada del producto de una constante por una función derivable es el producto de la constante por la derivada de dicha función.

Ejemplo 4

Si $f(x) = x^2$ y $c = 5$

entonces

$(5x^2)' = 5\,(x^2)' = 5.2.x = 10x$

Derivada de la suma de dos funciones

Si f y g son dos funciones derivables en un intervalo (a, b) entonces f + g es derivable en (a, b) y se cumple:

Es decir:

$$(f + g)'\,(x) = f'\,(x) + g'\,(x)$$

La derivada de una suma de dos funciones derivables es la suma de las derivadas de dichas funciones.

Ejemplo 5

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$

entonces

$(f + g)(x) = x^2 + x^3$

y $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 3x^2$

Derivada de la diferencia de funciones

Si f y g son funciones derivables en (a, b) entonces f - g es derivable en (a, b) y se cumple:

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

Es decir:

La derivada de la diferencia de dos funciones derivables es la diferencia de las derivadas de dichas funciones.

Ejemplo 6

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x$

entonces:

$(f - g)(x) = \sqrt{x} - x$

y $(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$

Derivada del producto de funciones

Si f y g son funciones derivables en (a, b) entonces f.g es derivable en (a, b) y se cumple:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Es decir:

La derivada del producto de dos funciones derivables es el producto de la derivada de la primera función por la segunda sin derivar más el producto de la primera sin derivar por la derivada de la segunda función.

Ejemplo 7

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = x$

entonces:

$(f \cdot g)(x) = x^3$

y $(f \cdot g)'(x) = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2$

Derivada de un cociente de funciones

Si f y g son derivables en (a, b) y $g \neq 0$ en (a, b) entonces $\frac{f}{g}$ es derivable en (a, b) y se cumple:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Es decir:

La derivada de un cociente de funciones es la derivada del numerador por el denominador sin derivar menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividida esta diferencia por el cuadrado del denominador.

Ejemplo 8

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^3$

entonces:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x^3 - \sqrt{x} \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x} \cdot x^3}{2x} - 3\sqrt{x}\, x^2}{x^6} =$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{x} \cdot x^2}{2} - 3\sqrt{x}\, x^2}{x^6} = \frac{-\frac{5}{2}\sqrt{x}\, x^2}{x^6} = -\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$$

Para aplicar (D)

(a) Calcular f'(x) utilizando la regla de derivación del producto de funciones:

$a_1)$ $f(x) = x(x^4 - 2x)$

.....

$a_2)$ $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$

.....

$a_3)$ $f(x) = x \cos x$

.....

(b) Calcular en cada uno de los siguientes casos f'(x) aplicando la regla de derivación del cociente de funciones:

$b_1)$ $f(x) = \frac{x + 1}{x^2}$

.....

$b_2)$ $f(x) = tg\ x$

.....

$b_3)$ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 3}$

.....

Derivada de una función compuesta

Recordamos el concepto de función compuesta:

Dadas dos funciones $f: A \to B$ y $g: B \to C$, se define una nueva función de A en C, que indicamos $f \circ g$, de la siguiente manera:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x))$$

Es decir, la composicion de f con g, es la función que hace corresponder a cada $x \in A$ un $y \in C$ tal que $y = g(f(x))$ (fig. 7).

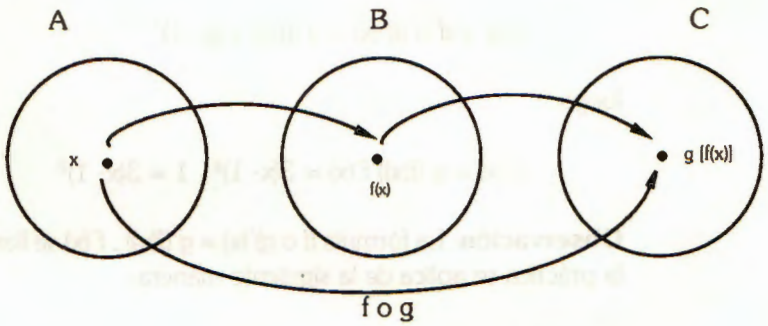


fig. 7

Ejemplo 9

Si $f(x) = 3x^2$ y $g(x) = sen\ x$

entonces:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = sen\ 3x^2$$

Ejemplo 10

Si $f(x) = 2x + 1$ y $g(x) = x^4$

entonces:

$$(f \circ g) = g(f(x)) = (2x + 1)^4$$

Para calcular la derivada de una función compuesta, debemos tener en cuenta las funciones que la componen.

Si f y g son dos funciones derivables en A y B respectivamente, entonces $f \circ g$ es derivable en A y se cumple:

$$(f \circ g)'(x) = (g(f(x))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Ejemplo 11

Si $f(x) = x^2$ y $g(x) = \text{sen } x$

entonces:

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = \text{sen } x^2$$

y $(\text{sen } x^2)' = g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos x^2 \cdot 2x$

es decir:

$$(\text{sen } x^2)' = 2x \cos x^2$$

Ejemplo 12

Calcular la derivada de $h(x) = (x - 1)^3$.

Observemos que $y = h(x)$ puede expresarse como la composición de $f(x) = x - 1$ y $g(x) = x^3$, es decir:

$$h(x) = (f \circ g)(x) = g(f(x)) = (x - 1)^3$$

luego:

$$h'(x) = g'(f(x))\, f'(x) = 3(x - 1)^2 \cdot 1 = 3(x - 1)^2$$

Observación: La fórmula $(f \circ g)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ se llama regla de derivación en cadena y en la práctica se aplica de la siguiente manera:

Ejemplo 13

Calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}^3 x$.

1ª) Derivamos la función con respecto al cubo: $3 \text{ sen}^2 x$

2ª) Derivamos con respecto al seno: $3 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$

luego:

$$f'(x) = 3 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$$

El orden elegido para derivar las funciones es inverso al orden que se sigue para calcular el valor de $f(x)$, pues en este caso calculamos primero sen x y luego lo elevamos al cubo.

Ejemplo 14

Calcular la derivada de $f(x) = \text{sen}^3(2x)$

1°) Derivamos con respecto al cubo: $3 \text{ sen}^2(2x)$

2°) Derivamos con respecto al seno: $3 \text{ sen}^2(2x) \cdot \cos(2x)$

3°) Derivamos con respecto a 2x: $3 \text{ sen}^2 2x \cdot \cos 2x \cdot 2$

luego:

$$f'(x) = 6 \text{ sen}^2 2x \cdot \cos 2x$$

Derivadas sucesivas

Dada una función f:A $\rightarrow$ R (A $\subset$ R) derivable, su derivada es una función de x y puede tener por lo tanto una derivada. Si esto ocurre llamamos a esta derivada, de la derivada de f derivada segunda de f.

Es decir:

$(f'(x))' = f''(x)$ (derivada segunda de f)

La derivada f'(x) se llama derivada primera de f.

Como f'' es también una función de x puede tener a su vez una derivada ,si esto ocurre llamamos a esta última derivada, derivada tercera de f.

Es decir:

$(f''(x))' = f'''(x)$ (derivada tercera de f)

Análogamente se definen las demás derivadas sucesivas de f obteniéndose a partir de la derivación de la derivada de un cierto orden n, la derivada de orden n + 1.

Ejemplo 15

Obtener las derivadas sucesivas de $f(x) = x^5$:

$f'(x) = 5x^4$

$f''(x) = 20x^3$

$f'''(x) = 60x^2$

$f^{IV}(x) = 120x$

$f^{V}(x) = 120$

$f^{VI}(x) = 0$

A partir de la derivada de orden 6, son todas las derivadas sucesivas iguales a cero.

Ejemplo 16

Calcular las derivadas sucesivas de f(x) = sen x:

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$

A partir de la derivada de orden 4 de f(x) = sen x las derivadas sucesivas se repiten periódicamente.

Para aplicar (E)

(a) Calcular en cada caso la derivada de f aplicando la regla de derivación en cadena.

a_1) $f(x) = \text{sen } 5x$ .....

a_2) $f(x) = (3x + 2)^5$ .....

a_3) $f(x) = \ln(\text{sen } x)$ .....

a_4) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$ .....

a_5) $f(x) = \cos^5(3x^2 + 1)$ .....

(b) Calcular las derivadas sucesivas de f en cada uno de los siguientes casos:

b_1) $f(x) = 3x^3$ .....

b_2) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 1$ .....

b_3) $f(x) = \cos x$ .....

b_4) $f(x) = (x + 3)^3$ .....

Interpretación física de la derivada

La expresión $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$ es la función horaria $x = f(t)$ que corresponde al MRUV (movimiento rectilíneo uniformemente variado).

Esta función permite establecer la posición (abscisa) del móvil para cualquier valor del tiempo t, cuando se conoce x_0, v_0 y a donde:

x_0 es la abscisa en el instante $t = 0$ (constante)

v_0 es la velocidad inicial (constante)

a es la aceleración (constante)

Como $x = f(t)$ es una función derivable, existe la derivada primera y es

$f'(t) = v_0 + at$ que es la fórmula de la velocidad en el MRUV.

Derivando $f'(t)$ se obtiene:

$$f''(t) = a$$

En el MRUV, la aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo y la velocidad es la derivada de la función horaria respecto del tiempo.

Para aplicar (F)

(a) Determinar la aceleración que adquiere un cuerpo sometido a un movimiento cuya función horaria es $x = 6 - 3t + t^2$.

.....

(b) Determinar la velocidad de un cuerpo en el instante $t = 2$ seg., si la función horaria del movimiento es $x = f(t) = 5t + 10t^2$.

.....

PARA EJERCITAR

1. Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$; $x_0 = \frac{3}{2}$

.....

b) $f(x) = 2x - x^3 + x^4$; $x_0 = -\frac{1}{2}$

.....

c) $f(x) = 3 . \sqrt{x}$; $x_0 = 2$

.....

d) $f(x) = \text{sen } x$; $x_0 = \frac{\pi}{3}$

.....

e) $f(x) = \ln x$; $x_0 = \frac{3}{2}$

.....

f) $f(x) = 2^x + x^2$; $x_0 = 1$

.....

g) $f(x) = \cos x + 3 \text{ sen } x$; $x_0 = \frac{\pi}{4}$

.....

h) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} - x$; $x_0 = -1$

.....

2. Hallar la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_0, siendo:

a) $f(x) = x^2 + 3x$, $x_0 = 1$

.....

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x_0 = 0$

.....

c) $f(x) = -x^2 + 5$, $x_0 = -1$

.....

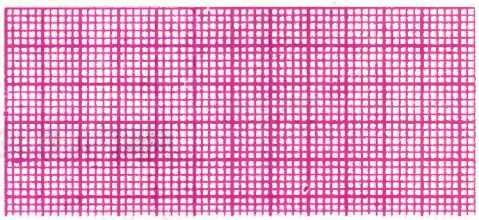
3. Calcular la pendiente y la inclinación de la tangente a cada una de las siguientes parábolas en el punto de abscisa x = 2. Representar gráficamente.

a) $f(x) = -2x^2 + 4x$

.....

.....

.....

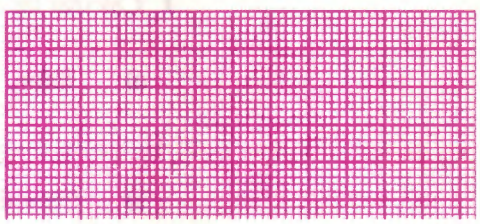


b) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$

.....

.....

.....

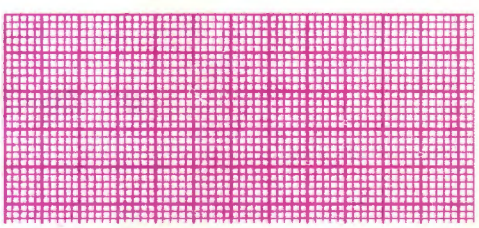


c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

.....

.....

.....



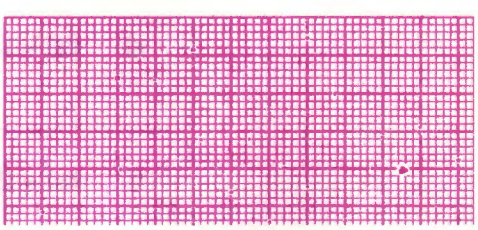
4. Dada $f(x) = 2x - \frac{1}{2}x^2$ hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en $x_0 = 3$. Graficar.

.....

.....

.....

.....



5. Hallar la ecuación de la recta r que pasa por el origen y es paralela a la recta t, siendo t la tangente a $f(x) = x^3 + 2$ en $x_0 = -1$.

.....

.....

.....

.....

6. Hallar el punto de la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x$ en el cual la inclinación de la tangente es de 45°.

.....

.....

7. Determinar la ecuación de la recta tangente a $f(x) = \frac{1}{x}$ definida en el intervalo (0 , 5), que forma un ángulo de 135°con el eje X.

.....

.....

8. Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$ .....

b) $f(x) = e^x \cdot \sqrt[3]{x}$ .....

c) $f(x) = (x^2 + x) \log x$ .....

d) $f(x) = \ln x \cdot 2^x$ .....

e) $fx) = \frac{\text{sen } x}{\sqrt{x}}$ .....

f) $f(x) = \frac{\sqrt{x} + 1}{x - 1}$ .....

g) $f(x) = \frac{\cos x}{x + 1}$ .....

9. Dada $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, hallar los puntos de su gráfica donde la recta tangente tiene pendiente $-\frac{1}{9}$

.....

.....

10. Hallar los puntos de la gráfica en los cuales la tangente a $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ tiene una inclinación de 45°.

.....

.....

11. Derivar las siguientes funciones

a) $f(x) = (2x^2-1)^5$ .....

b) $f(x) = \text{sen}^3 (8x + 1)$ .....

c) $f(x) = e^{2x^2} + 1$ .....

d) $f(x) = \cos (\ln x)$ .....

e) $f(x) = 3^{\ln 2x}$ .....

12. Calcular las derivadas sucesivas de f en cada uno de los siguientes casos:

a) $f(x) = x^5 + 4x$ .....

.....

b) $f(x) = (2x^3 - 1)^2$ .....

.....

c) $f(x) = x. e^x$ .....

.....

13. Calcular la pendiente de la recta tangente a $f(x) = \text{sen } 4x$ en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

.....

14. Calcular los puntos en que se anula la derivada de $f(x) = x^3 - 2x$.

.....

.....

15. Calcular los puntos en que la derivada de $f(x) = \frac{x + 1}{x}$ es igual a -4.

.....

.....

16. Dada $f(x) = -x^3$ calcular el área del triángulo determinado por el eje X y las rectas tangente y normal a la curva en $x_0 = 1$. Graficar.

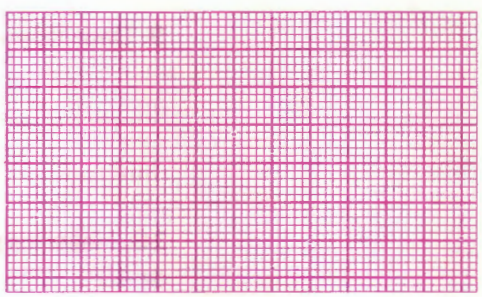
.....

.....

.....

.....

.....



17. Dada $f(x) = -x^4 + 6x^2$, calcular los puntos en los cuales se anula la derivada segunda de f.

.....

18. Se deja caer una pelota con una velocidad inicial de 30 m/seg. Determinar su velocidad a los 3 segundos ($g \cong 10$ m/seg^2).

.....

19. Un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba a una velocidad inicial de 40 m/seg. Calcular su velocidad en el instante $t = 2$ seg.

.....

20. Determinar la aceleración que adquiere un cuerpo sometido a un movimiento cuya función horaria es $f(t) = 3 - 2t + 3t^2$.

.....

Función estrictamente creciente en un punto x_0 de su dominio

Dada f: A → R (A ⊂ R), decimos que f es estrictamente creciente en $x_0 \in A$ (fig. 8) si existe un entorno de x_0, E (x_0, δ), tal que:

si $x_1, x_2 \in E(x_0, \delta)$ y $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$

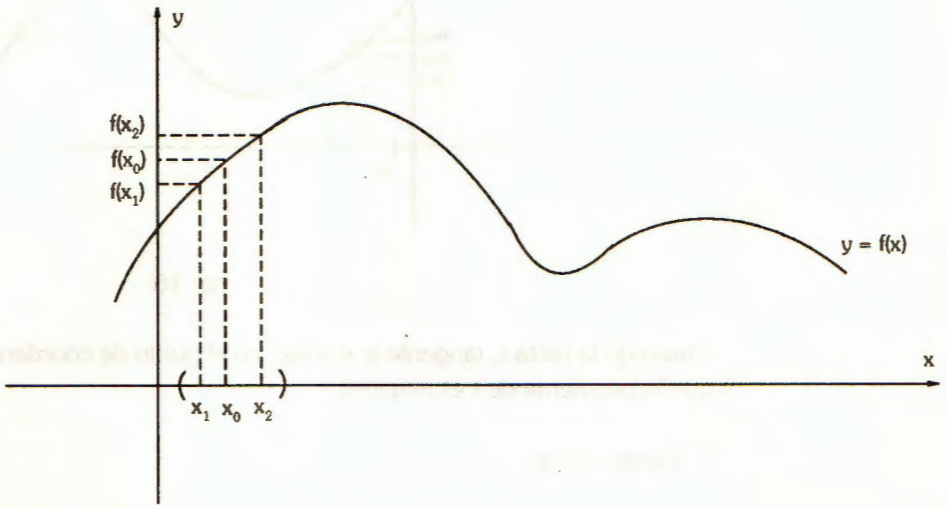


fig. 8.

Trazando la tangente a y = f(x) en $(x_0; f(x_0))$ (fig. 9)

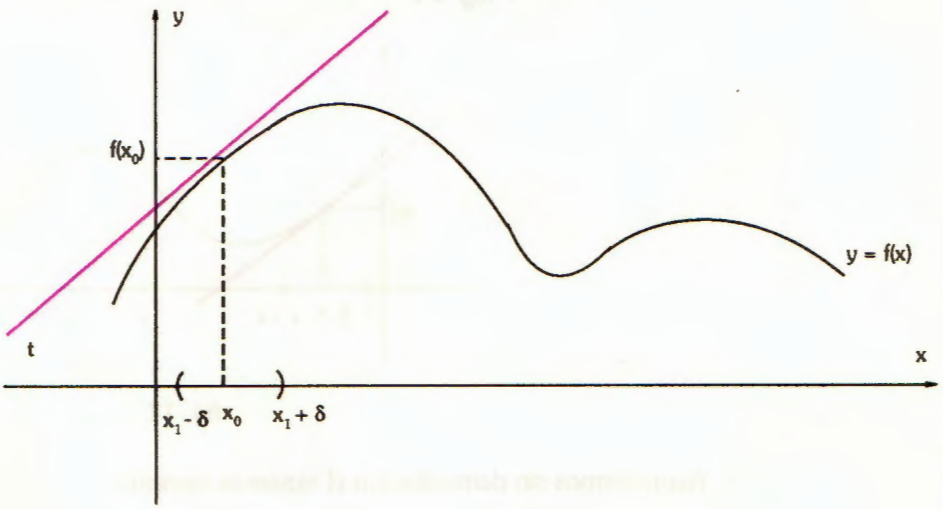


fig. 9

observamos que t, tangente en $(x_0; f(x_0))$, tiene pendiente positiva y como

$$\text{pend. de } t = f'(x_0)$$

resulta que la derivada de la función en x_0 es positiva.

Función estrictamente decreciente en un punto x_0 de su dominio

Dada f: A $\rightarrow$ R (A $\subset$ R), decimos que f es estrictamente decreciente (fig. 10) en $x_0 \in A$, si existe un entorno de x_0, $E(x_0, \delta)$ tal que:

si $x_1, x_2 \in E(x_0, \delta)$ y $x_1 < x_0 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_0) > f(x_2)$

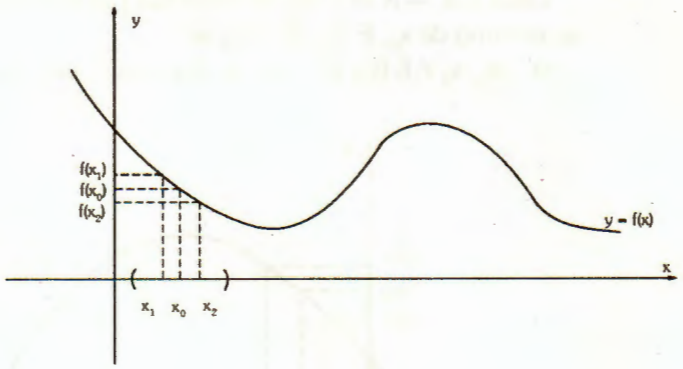


fig. 10

Trazando la recta t, tangente a $y = f(x)$ en el punto de coordenadas $(x_0 ; f(x_0))$ (fig. 11) se ve que la pendiente de t es negativa.

Luego, como

$$\text{pend. de } t = f'(x_0)$$

resulta que:

$$f'(x_0) < 0$$

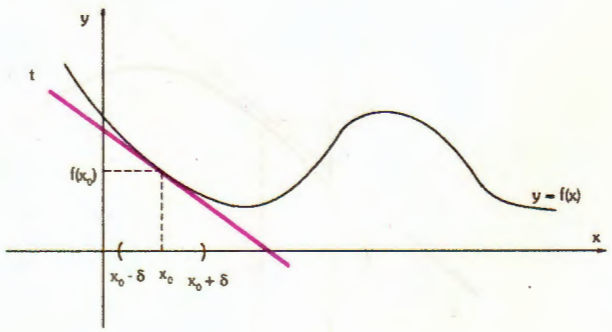


fig. 11

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 1

Si f: A $\rightarrow$ R, (A $\subset$ R) es derivable en (a, b) $\subset$ A y $x_0 \in (a, b)$
Entonces:
$f'(x_0) > 0 \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en x_0.
$f'(x_0) < 0 \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en x_0.

Función estrictamente creciente en un intervalo

Dada f: A → R (A ⊂ R), decimos que f es estrictamente creciente en el intervalo [a, b] (fig. 12) ([a, b] ⊂ A) si:
para todo par de puntos x_1, x_2 ε [a, b] tal que $x_1 < x_2$ se cumple

$$f(x_1) < f(x_2)$$

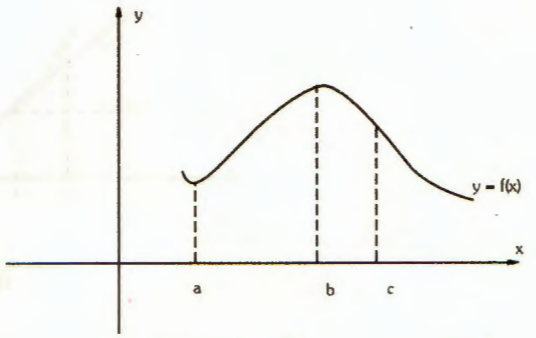


fig. 12

Así, f (fig. 12) es creciente en [a, b] mientras que en [a, c] no lo es.
Observemos que si trazamos la tangente a la curva en cualquier punto de coordenadas (x ; f(x)) con x ε (a, b) la pendiente de dicha tangente es positiva. Luego, si x ε (a, b) resulta f'(x) > 0 (fig. 13).

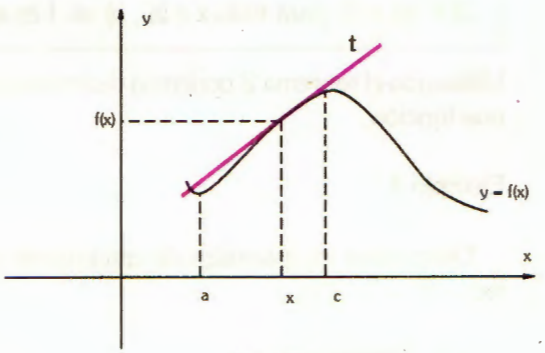


fig. 13

Función estrictamente decreciente en un intervalo

Dada f: A → R (A ⊂ R), decimos que f es estrictamente decreciente en [a, b] ([a ,b] ⊂ A) (fig. 14) si:
para todo par de puntos x_1, x_2 ε [a, b] tal que $x_1 < x_2$ se cumple

$$f(x_1) > f(x_2)$$

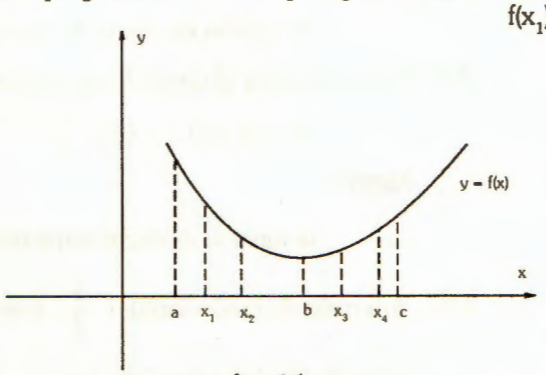


fig. 14

Así, f (fig. 14) es estrictamente decreciente en [a, b], pero no lo es en [a, c], pues si bien $x_2, x_3 \in [a, c]$ y $x_2 < x_3$ y $f(x_2) > f(x_3)$, eligiendo el par de puntos x_2, x_4 se verifica $x_2 < x_4$ pero $f(x_2) < f(x_4)$.

Observemos que si trazamos la tangente t en cualquier punto (x ; f(x)) con $x \in (a, b)$, la pendiente de dicha recta es negativa. Luego, si $x \in (a, b)$ resulta $f'(x) < 0$ (fig. 15).

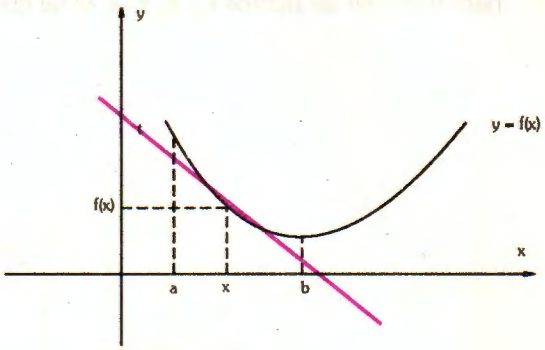


fig. 15

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 2

Si $f: A \to R$ ($A \subset R$) es continua en [a, b] ([a, b] $\subset$ A) y derivable en (a, b), entonces:
1) $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a , b) \Rightarrow$ f es estrictamente creciente en [a, b].
2) $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a , b) \Rightarrow$ f es estrictamente decreciente en [a, b].

Utilizando el teorema 2 podemos determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función.

Ejemplo 1

Determinar los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $f(x) = x^2 + 5x + 6$

1°) Hallamos f'(x):

$$f'(x) = 2x + 5$$

2°) Determinamos el conjunto de puntos que verifica $f'(x) > 0$

$$2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$$

luego:

la función es creciente en $(-\frac{5}{2} , + \infty)$

3°) Determinamos el conjunto de puntos que verifica $f'(x) < 0$

$$2x + 5 < 0 \Leftrightarrow x < -\frac{5}{2}$$

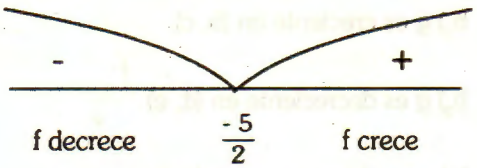
luego:

la función es decreciente en $(- \infty , -\frac{5}{2})$

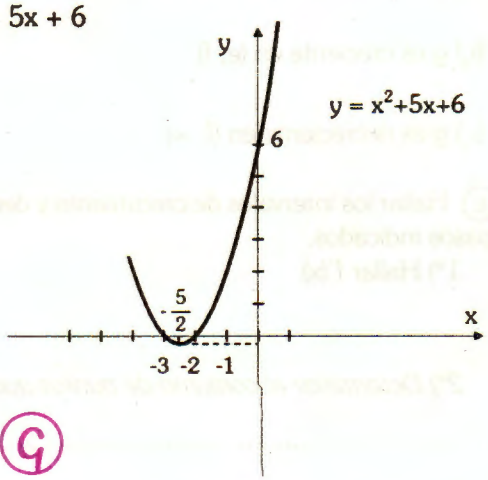
4°) Intervalo de crecimiento: $(-\frac{5}{2} , + \infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(- \infty , -\frac{5}{2})$

5°) Representamos mediante el siguiente diagrama, los signos de la derivada de f.



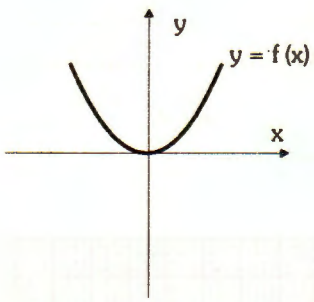
6°) Gráfica de $y = x^2 + 5x + 6$



Para aplicar G

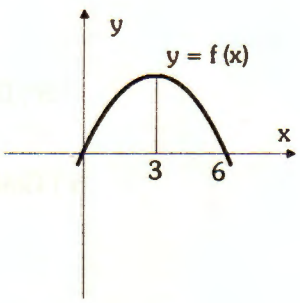
(a) Completar indicando el intervalo correspondiente:

a_1)



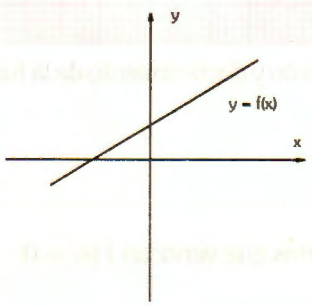
f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

a_2)



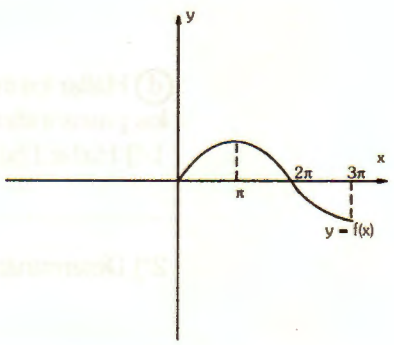
f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

a_3)



f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

a_4)



f es creciente en (,)
f es decreciente en (,)

ⓑ Responder V o F.

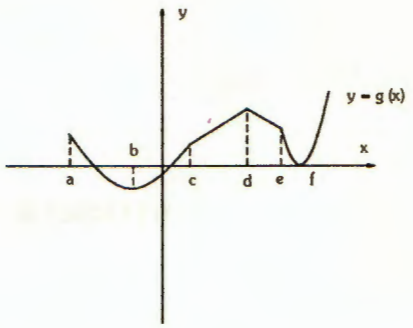
b_1) g es creciente en (b, c)

b_2) g es decreciente en (d, e)

b_3) g es decreciente en (a, c)

b_4) g es creciente en (e, f)

b_5) g es decreciente en (f, ∞)



ⓒ Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x) = x^2 - 7x + 12$ siguiendo los pasos indicados.

1°) Hallar f'(x).

.....

2°) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) > 0$.

.....

3°) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) < 0$.

.....

4°) Determinar:

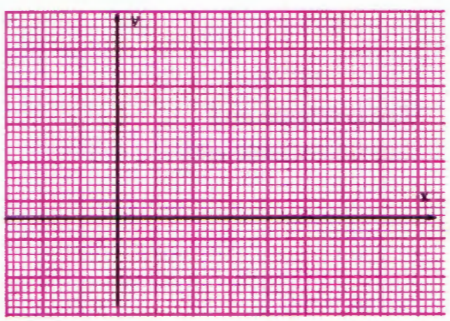
Intervalo de crecimiento .....

Intervalo de decrecimiento .....

5°) Diagrama

.....

6°) Gráfica de la función



ⓓ Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = -x^2 + 2x - 1$ siguiendo los pasos indicados:

1-°) Hallar f'(x).

.....

2°) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) > 0$.

.....

3°) Determinar el conjunto de puntos que verifican $f'(x) < 0$.

.....

4°) Determinar:

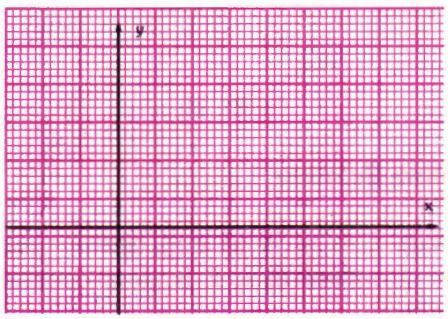
Intervalo de crecimiento .....

Intervalo de decrecimiento .....

5°) Diagrama

.....

6°) Gráfica de la función



(e) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x) = sen x en $[-\pi, \frac{\pi}{2}]$ siguiendo los pasos indicados.

1°) Hallar f'(x).

.....

2°) Determinar el conjunto de puntos que verifican f'(x) > 0

.....

3°) Determinar el conjunto de puntos que verifican f'(x) < 0

.....

4°) Determinar:

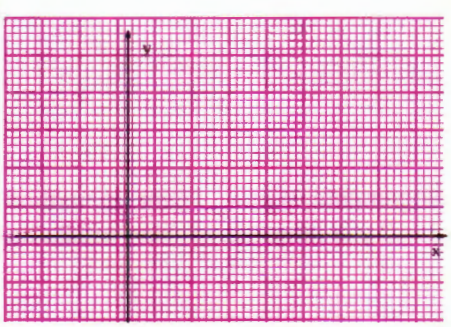
Intervalo de crecimiento .....

Intervalo de decrecimiento .....

5°) Diagrama

.....

6°) Gráfica de la función



Máximos y Mínimos

Máximo Relativo

Dada f: A → R (A ⊂ R), decimos que f tiene un máximo relativo en $x_0 \in A$ si es posible hallar un entorno de x_0, E (x_0, δ) tal que para todo x perteneciente a ese entorno sea $f(x_0) \geq f(x)$ (fig.16).

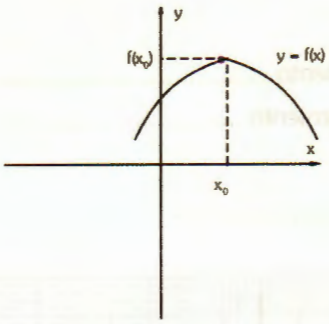


fig. 16

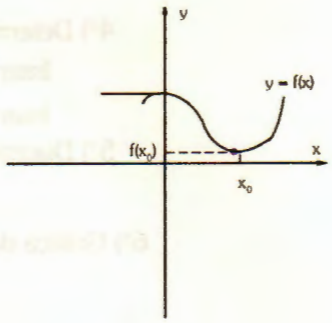


fig. 17

Mínimo Relativo

Dada f: A $\rightarrow$ R (A $\subset$ R), decimos que f tiene un mínimo relativo en $x_0 \in A$ si es posible hallar un entorno de x_0, E (x_0, δ) tal que para todo x perteneciente a ese entorno sea $f(x_0) \leq f(x)$ (fig.17).

En la búsqueda de un máximo o de un mínimo relativo se comparan los valores de la función en un punto con los valores que toma la función en un entorno de ese punto.

Observemos que si x_0 es un punto donde la función alcanza un máximo relativo y la derivada existe y es finita, entonces:

1°) $f'(x_0)$ no puede ser negativa porque la función en ese caso sería decreciente en x_0.
2°) $f'(x_0)$ no puede ser positiva porque en ese caso sería f creciente en x_0.

Luego, debe ser $f'(x_0) = 0$.
Gráficamente se ve que en ese punto la tangente a $y = f(x)$ es horizontal (fig. 18).

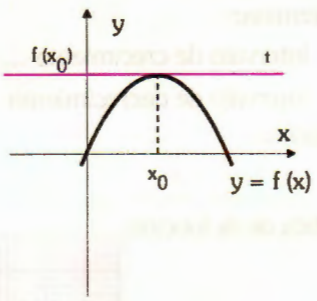


fig. 18

Análogamente, si en x_0, f tiene un mínimo relativo y f' (x_0) existe y es finita, entonces debe ser $f'(x_0) = 0$ y la tangente también resulta horizontal (fig. 19).

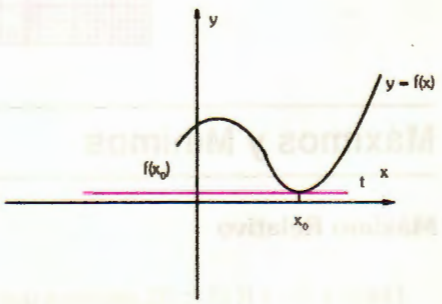


fig. 19

Teorema 3

Sea $f: A \to R\ (A \subset R)$ derivable en $x_0 \in A$. Si en x_0 la función tiene un máximo o un mínimo relativo entonces $f'(x_0) = 0$.

Podemos afirmar que:

Si en x_0 f tiene un máximo relativo entonces $f'(x_0) = 0$
Si en x_0 f tiene un mínimo relativo entonces $f'(x_0) = 0$

Sin embargo la condición $f'(x_0) = 0$ no es suficiente para asegurar la existencia de máximo o mínimo relativo en x_0.

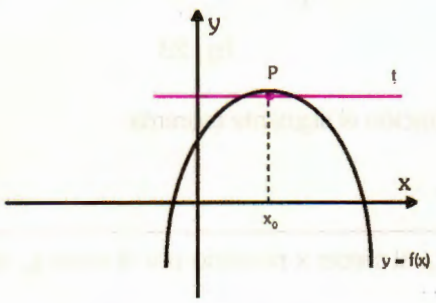


fig. 20

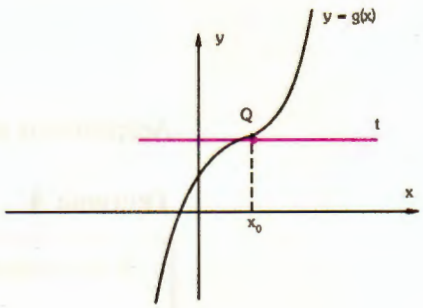


fig. 21

Así, en la figura 20, se ve que en el punto $P = (x_0 ; f(x_0))$ la función tiene una tangente horizontal y alcanza un máximo relativo en x_0, mientras que $y = g(x)$ (fig. 21) tiene en $Q = (x_0 ; f(x_0))$ tangente horizontal pero no alcanza en x_0 máximo ni mínimo relativo.

Por lo tanto para determinar un máximo o un mínimo relativo, además de buscar el punto x_0 donde $f'(x_0) = 0$, es necesario analizar el comportamiento de la función en un entorno de x_0.

Ejemplo 3
La función cuya gráfica se representa en la figura 22 tiene un máximo en x_0.
Observemos que en x_0 la función pasa de creciente a decreciente en un entorno de x_0. Es decir, la tangente pasa de positiva a la izquierda de x_0, a negativa a la derecha de x_0, en dicho entorno.

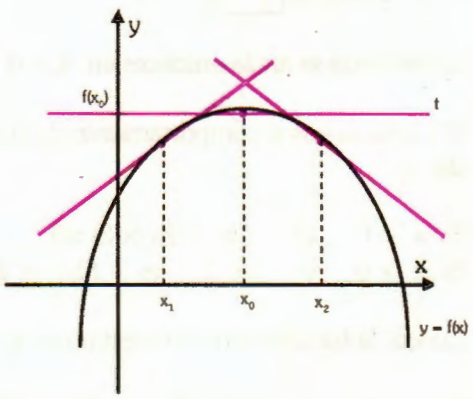


fig. 22

Ejemplo 4

La función representada en la figura 23 tiene un mínimo en x_0. En dicho punto la función pasa de decreciente a creciente.

Luego en un entorno de x_0 la tangente pasa de negativa a la izquierda de x_0 a positiva a la derecha de x_0.

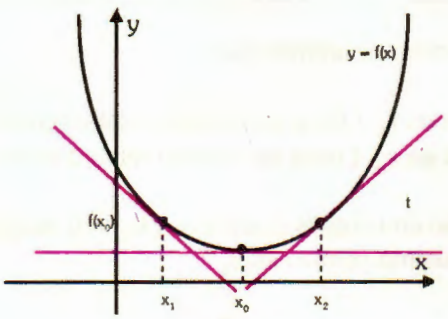


fig. 23

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 4

Si en un entorno de x_0, al crecer x pasando por el valor x_0, la derivada f' pasa de:

a) positiva a negativa, entonces f tiene un máximo relativo en x_0.
b) negativa a positiva, entonces f tiene un mínimo relativo en x_0.
c) positiva a positiva o de negativa a negativa, entonces f no tiene extremo relativo en x_0.

Aclaración: Los máximos y mínimos relativos se llaman extremos relativos.

Ejemplo 5

Dada f: R $\rightarrow$ R por $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada de la función.

1°) Determinamos los puntos en los cuales se anula f'(x).

$f'(x) = 2x^2 - 4x$

$2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$

$2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

o

$x - 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2}$

La derivada se anula entonces en $x_1 = 0$ y en $x_2 = 2$

2°) Analizamos el comportamiento de la función en un entorno de x_1 y luego en un entorno de x_2.

Si $x < 0$ es $f'(x) = 2x(x-2) > 0$

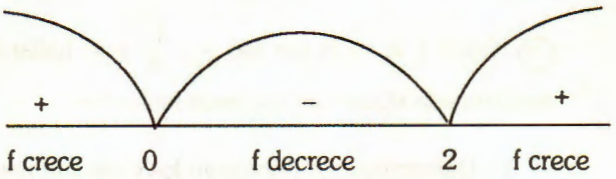
Si $x > 0$ y $x < 2$ es $f'(x) = 2x(x - 2) < 0$

Luego, la función tiene un máximo en $x_1 = 0$

Si $x < 2$ y $x > 0$ es $f'(x) < 0$

Si $x > 2$ es $f'(x) > 0$

Luego, la función alcanza un mínimo en $x_2 = 2$.



Intervalos de crecimiento: $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$

Intervalo de decrecimiento: $(0\ ,\ 2)$

Punto de la curva donde f alcanza el máximo: $(x_1\ ;\ f(x_1)) \quad = \quad (0;0)$

Punto de la curva donde f alcanza el mínimo: $(x_2\ ;\ f(x_2)) = \left(2\ ;\ -\frac{8}{3}\right)$

3°) Hallamos los ceros de la función resolviendo la ecuación

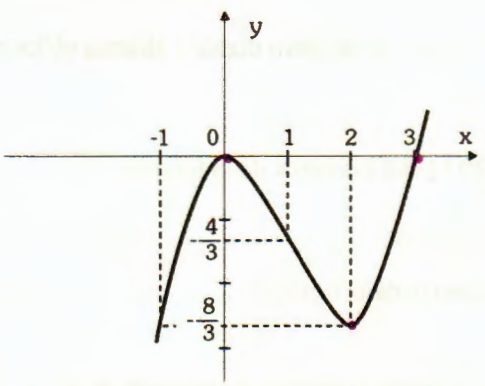
$$\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 = 0$$

factoreando:

$$2x^2\left(\frac{1}{3}x-1\right) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0} \\ \frac{1}{3}x-1=0 \Rightarrow \boxed{x = 3} \end{cases}$$

Ceros de la función: $x_3 = 0$ y $x_4 = 3$

4°) Conocidos los extremos, de la función y los puntos donde ésta corta el eje X, podemos hacer la siguiente gráfica aproximada de $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2$:



Máximo Absoluto

f: A → R (A ⊂ R) tiene un máximo absoluto en $x_0 \in A$ si y sólo si

$$\boxed{f(x) \leq f(x_0) \text{ para todo } x \in A}$$

El máximo relativo de la función del ejemplo 3 (fig. 22) es un máximo absoluto.

Mínimo Absoluto

f: A → R (A ⊂ R) tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in A$ si y sólo si

$$\boxed{f(x) \geq f(x_0) \text{ para todo } x \in A}$$

El mínimo relativo de la función del ejemplo 4 (fig. 23) es un mínimo absoluto.

Para aplicar (H)

ⓐ Dada f: R → R por $f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2$ hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada siguiendo los pasos indicados.

1°) Determinar los puntos en los cuales se anula f'(x).

.....

.....

2°) Analizar el comportamiento de la función en los entornos de los puntos donde se anula f'(x).

.....

.....

Máximo/s ..... mínimo/s .....

Diagrama de signos de la derivada:

.....

Intervalo/s de crecimiento: .....

Intervalo/s de decrecimiento: .....

Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s

.....

Punto/s de la curva donde f alcanza el/los mínimo/s

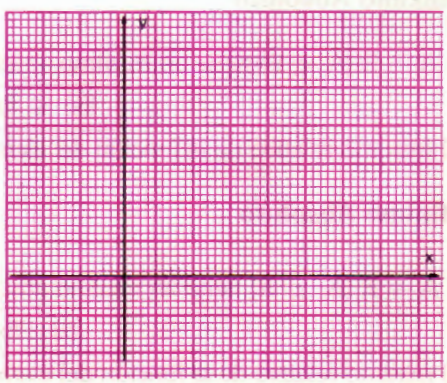
.....

3°) Hallar los ceros de la función.

.....

Cero/s de la función: .....

4°) Trazar la gráfica aproximada de $f(x) = -\frac{x^3}{6} + x^2$



(b) Dada: f: R → R por $f(x)=x^2+5x$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada, siguiendo los pasos indicados en (a).

1°)

.....

.....

2°)

.....

.....

Máximo/s ..... mínimo/s .....

Diagrama de signos de la derivada:

.....

Intervalo/s de crecimiento: .....

Intervalo/s de decrecimiento: .....

Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s:

.....

Punto/s de la curva donde f alcanza el/los mínimo/s:

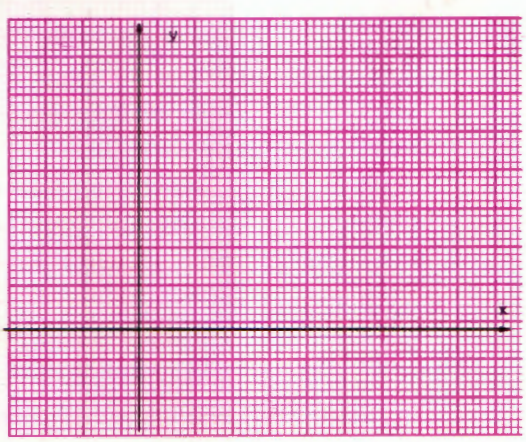
.....

3°)

.....

Cero/s de la función: .....

4°)



ⓒ Dada f: R $\rightarrow$ R por $f(x) = x^2 - \frac{1}{3}x^3$, hallar los extremos relativos y construir la gráfica aproximada, siguiendo los pasos indicados en ⓐ.

1°)

.....

.....

2°)

.....

.....

Máximo/s ..... mínimo/s .....

Diagrama de signos de la derivada:

.....

Intervalo/s de crecimiento: .....

Intervalo/s de decrecimiento: .....

.....

Punto/s de la curva donde f alcanza el/los máximo/s relativo/s:

.....

Punto/s de la curva donde alcanza el/los mínimos/s relativo/s:

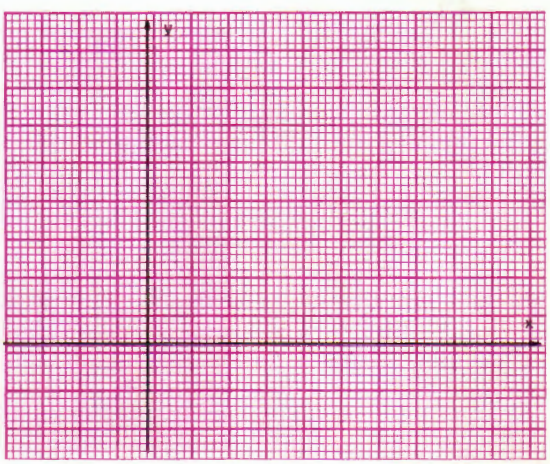
.....

3°)

.....

Cero/s de la función: .....

4°)



Concavidad. Puntos de inflexión

Dada y = f(x) (fig. 24) consideremos un punto Q de su gráfica donde exista tangente y ésta no sea paralela al eje Y.

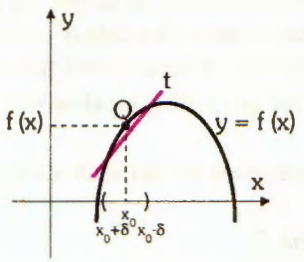


fig. 24

Llamando t a la tangente a y = f(x) en Q = (x_0 ; y_0) podemos decir, observando la figura 24, que en un entorno de x_0, la gráfica de f se conserva por debajo de t. En este caso se dice que f es cóncava hacia abajo en Q o bien, que tiene concavidad negativa en Q.

Decimos que una curva es cóncava hacia abajo o que tiene concavidad negativa en Q = (x_0 ; y_0) si todos los puntos de la curva próximos a Q, están por debajo de la tangente a la curva en el punto Q.

Análogamente, decimos que una curva es cóncava hacia arriba o que tiene concavidad positiva en Q = (x_0 ; y_0) si todos los puntos de la curva próximos a Q están por arriba de la tangente a la curva en el punto Q (fig. 25).

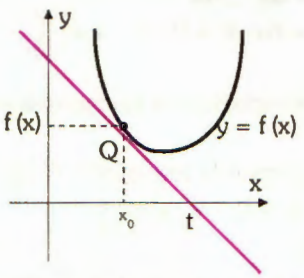


fig. 25

Una función continua puede presentar concavidad positiva en algunos intervalos y concavidad negativa en otros. Por lo tanto existirán, en esos casos, puntos del dominio donde se produce el cambio de concavidad. **Estos puntos se llaman Puntos de Inflexión.**

Veamos como la determinación de intervalos de concavidad positiva o negativa y puntos de inflexión se relacionan con el signo de la derivada segunda:

Consideremos la gráfica de la función y = g (x) (fig 26)

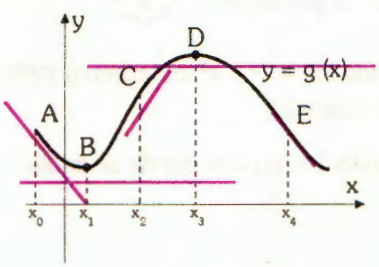


fig. 26

Observando la gráfica de y = g(x) se ve que la curva tiene concavidad positiva en el intervalo (x_0 , x_2) y concavidad negativa en (x_2, x_4).

Por otra parte, analizando la derivada de g se ve que en el intervalo (x_0, x_2), g' es una función creciente pues pasa de ser negativa a ser positiva. Luego, si existe la derivada segunda debe ser g" (x) > 0 en (x_0, x_2).

Del mismo modo, se ve que en el intervalo (x_2, x_4) g' es decreciente, pues pasa de positiva a negativa. Luego, si existe g", debe ser g'' (x) < 0.

Los puntos, pertenecientes a la gráfica de g, de abscisas x_2 y x_4 son de inflexión, pues en ellos se produce un cambio en el sentido de la concavidad. La derivada segunda en x_2 y x_4 es nula.

Aceptaremos sin demostración el siguiente teorema:

Teorema 5

Si f es continua en [a ,b] y existe f" en (a, b), entonces:

(a) Si f"(x) > 0 para todo x ε (a, b), f es cóncava hacia arriba en [a, b]

(b) Si f"(x) < 0 para todo x ε (a, b), f es cóncava hacia abajo en [a, b].

(c) Si $f''(x_0) = 0$ para algún x_0 ε (a, b) y cambia de signo en x_0 es $(x_0; y_0)$ un punto de inflexión de f .

Ejemplo 6

Dada $f(x) = x^3 - 2x^2$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

1°) Hallamos los puntos donde se anula la derivada segunda.

$f'(x) = 3x^2 \_ 4x$

$f''(x) = 6x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

2°) Determinamos los intervalos de concavidad.

Resolvemos la inecuación f" (x) > 0

$6x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$

luego:

f tiene concavidad positiva en $(\frac{2}{3} , +\infty)$

Resolvemos la inecuación f"(x) < 0

$6x - 4 < 0 \Rightarrow x < \frac{2}{3}$

luego:

f tiene concavidad negativa en $(-\infty, \frac{2}{3})$

Como f cambia de concavidad en $x = \frac{2}{3}$ entonces f tiene un punto de inflexión en $(\frac{2}{3}; -\frac{64}{27})$.

Para aplicar (1)

(a) Dada $f(x) = x^3 + x^2$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión siguiendo los pasos indicados.

1°) Hallar los puntos donde se anula f"(x).

.....

.....

2°) Determinar los intervalos de concavidad.

.....

.....

.....

Punto/s de inflexión: .....

(b) Dada $f(x) = x^3 - 3x$, determinar intervalos de concavidad y puntos de inflexión, procediendo como en (a) .

1°)

.....

.....

2°)

.....

.....

.....

Punto/s de inflexión: .....

7.3 PROBLEMAS

Problema 1

Con una hoja de cartón de 54 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa de base cuadrada y capacidad máxima. Calcular las dimensiones que debe tener la caja.

Solución

Para construir la caja debemos trazar paralelas a los lados a una distancia x de cada borde de la hoja, recortar los cuadrados de lado x determinados en cada esquina y luego doblar la hoja por las líneas marcadas (fig. 27).

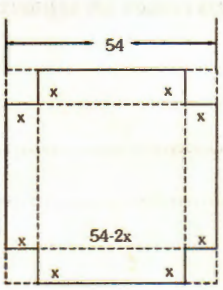


fig. 27

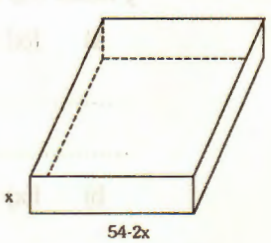


fig. 28

De ésta manera se construye una caja (fig 28) de altura x, área de la base igual a $(54 - 2x)^2$ y capacidad C, donde:

$$C = (54 - 2x)^2.x$$

o bien,

$$C = 4x^3 - 216x^2 + 2916\,x$$

y como

C es función de x, es decir, $C = f(x) = 4x^3 - 216x^2 + 2916\,x$ el problema a resolver, consiste en hallar un máximo de f(x).

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 12x^2 - 432\,x + 2916$$

y factoreando, resulta:

$$f'(x) = 12\,(x - 27)\,(x - 9)$$

luego:

$$f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = 27 \quad \text{ó} \quad x = 9$$

Si x = 27 es C = 0, entonces este valor no nos sirve pues no es posible armar una caja cuya capacidad sea igual a cero.

Si x = 9, C toma el valor máximo, pues en x = 9 f'(x) pasa de positiva a negativa.

Entonces, las dimensiones de la caja son: lado de la base: 36 cm, altura: 9 cm.

Problema 2

De todos los rectángulos de 25 cm^2 de superficie, ¿cuál es el de menor perímetro?

Solución

Si llamamos **x** a la base, **y** a la altura y **p** al perímetro del rectángulo (fig. 29) es:

$$p = 2x + 2y \qquad (1)$$

y como

$$x.\,y = 25 \quad \text{es} \quad y = \frac{25}{x} \qquad (2)$$

reemplazando (2) en (1):

$$p = 2x + \frac{50}{x}$$

y como p es función de x, es decir:

$$p = f(x) = 2x + \frac{50}{x}$$

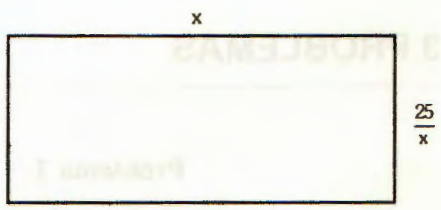


fig. 29

derivando f(x), resulta:

$$f'(x) = 2 - \frac{25}{x^2}$$ que se anula para x = 5.

Estudiando la variación de la derivada en un entorno de 5, se ve que p = f(x) tiene un mínimo en x = 5. Luego el rectángulo buscado es un cuadrado de 5 cm de lado.

PARA EJERCITAR

21. Determinar los intervalos en los cuales las siguientes curvas son crecientes o decrecientes y hallar sus extremos relativos.

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$

.....

.....

b) $f(x) = 5x - x^5$

.....

.....

c) $f(x) = -x^2 + x + \frac{3}{4}$

.....

.....

22. Determinar los intervalos de concavidad de las siguientes curvas y hallar sus puntos de inflexión.

a) $f(x)= \frac{x^3}{2} + 2$

.....

.....

b) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x - 3$

.....

.....

c) $f(x) = -x^3 + 4x^2$

.....

.....

23. Determinar máximos, mínimos y puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3$

.....

.....

b) $f(x) = \cos x$ en $[0, \frac{3}{2}\pi]$

.....

.....

c) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$

.....

.....

24. Dada $f(x) = \frac{x^4}{2} - x^2$, determinar:

a) Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

.....

.....

b) Intervalos de concavidad.

.....

.....

c) Máximos y mínimos relativos.

.....

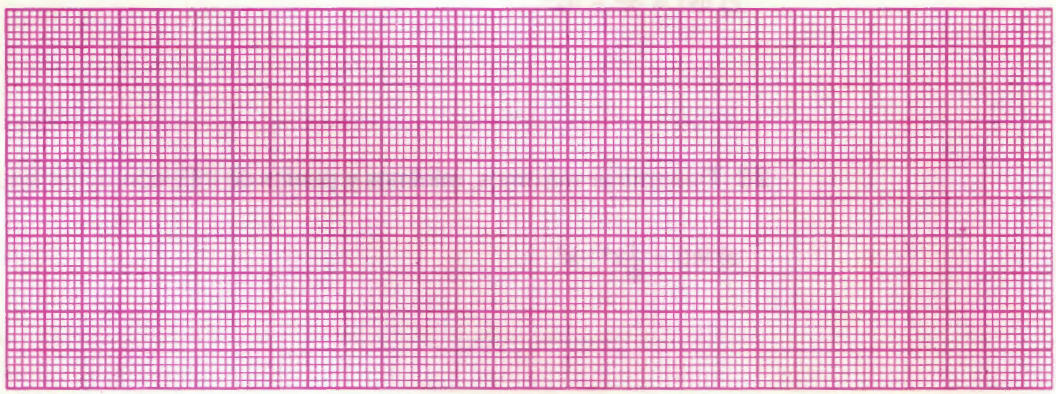
.....

d) Puntos de inflexión.

.....

.....

Construir la gráfica de la función.



25. Determinar intervalos de crecimiento, intervalos de concavidad, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x}$. Graficar la función en el intervalo (-5, 5).

.....

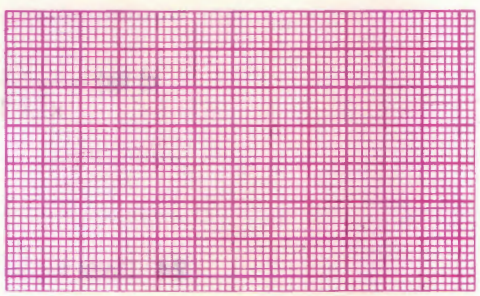
.....

.....

.....

.....

.....



26. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$ en el punto de inflexión.

.....

.....

27. Hallar los extremos relativos y puntos de inflexión de f(x) = sen 2 x en el intervalo $[0, \frac{3}{2}\pi]$.

.....

.....

28. Dada la función

$$f(x) \begin{cases} \dfrac{3x}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

determinar:

a) Puntos de discontinuidad.

.....

b) Máximos y mínimos.

.....

c) Puntos de inflexión.

.....

d) Ecuación de la recta tangente en x = 3.

.....

e) Ecuación de la recta perpendicular a la recta tangente en x = 3, en el punto de tangencia.

.....

f) Puntos del intervalo $(-\infty, 0)$ donde la tangente tiene pendiente $\frac{3}{2}$.

.....

29. Calcular el número positivo que sumado con su inverso multiplicativo da por resultado una suma mínima.

.....

.....

30. Con 40 dam de alambre se quiere delimitar una superficie rectangular ¿Cuáles deben ser las dimensiones para que el área sea máxima?

.....

.....

31. Sobre un hexágono se construye una pirámide regular de arista lateral 8. Hallar su altura para que el volumen sea máximo.

.....

.....

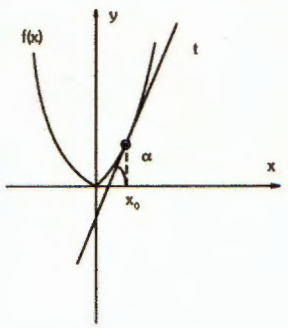
32. Calcular la altura y el radio de un tanque cilíndrico sin tapa para que, con una capacidad, de 10 kl, la superficie del material para construirlo sea mínima.

.....

.....

PARA RECORDAR

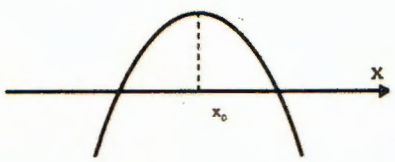
Derivada de una función en un punto



$$f'(x_0) = a = tg\ \alpha$$

Extremos Relativos

f tiene un máximo relativo en x_0 si:

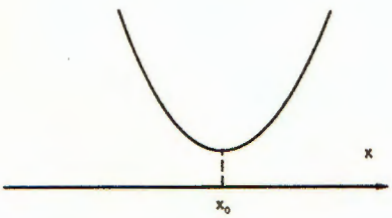


$f'(x_0) = 0$ y

signos de f'

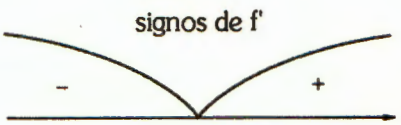
f crece x_0 f decrece

f tiene un mínimo relativo en x_0 si:



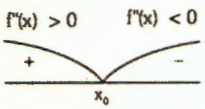
$f'(x_0) = 0$ y

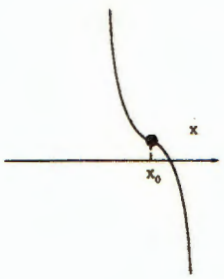
signos de f'

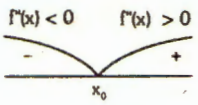


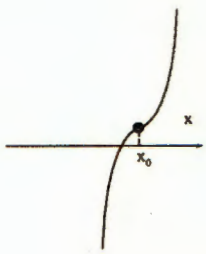
f decrece x_0 f crece

Punto de Inflexión









$(x_0 ; y_0)$ es un punto de inflexión de f si:

$f''(x_0) = 0$ y f" cambia de signo en x_0

GUIA DE ESTUDIO VIII

8.1 Concepto de integral

Para aplicar (A)

8.2 Cálculo de integrales

Para aplicar (B, C, D y E)

8.3 Cálculo de áreas

Para aplicar (F y G)
Para ejercitar (Ejercicios n° 1 al 22)

Para recordar

8.1 CONCEPTO DE INTEGRAL

Para determinar el área de una figura plana se elige en primer lugar una unidad de área, que puede ser un cuadrado de lado igual a la unidad de longitud adoptada. De esta manera es posible calcular el área $b \times h$ de un rectángulo de base b y altura h, y a partir de ésta, el área de un triángulo de la misma base y altura, que estará dada por $\frac{b \times h}{2}$.

Establecida el área de un triángulo, puede calcularse sin dificultad el área de cualquier polígono plano, pues como todo polígono admite una descomposición en un número finito de triángulos, la suma de las áreas de estos será igual al área del polígono.

Este procedimiento no es general pues no es aplicable al calculo de áreas de figuras planas limitadas por curvas, dado que éstas no pueden ser descompuestas en triángulos. Una forma de resolver este problema consiste en calcular el área de estas figuras como límite de áreas de polígonos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1

Cálculo del área del círculo de radio 1

El área del círculo de radio 1 puede definirse como el límite de la sucesión de áreas de polígonos regulares, cuando el número de lados de estos polígonos tiende a infinito.

Esto puede verse claramente si consideramos una circunferencia de radio 1 y dos polígonos de n lados, uno inscripto en la circunferencia y el otro circunscripto.

Supongamos por ejemplo n = 3 y llamemos:

A_3: área del triángulo inscripto

A'_3: área del triángulo circunscripto.

Observando la figura 1, se ve que el área del círculo esta comprendida entre A_3 y A'_3, es decir

$A_3 <$ área del círculo $< A'_3$

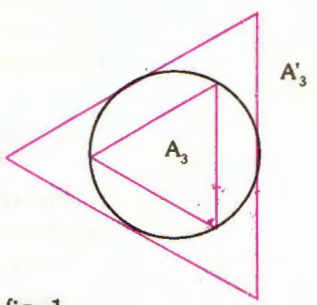


fig. 1

Si duplicamos el número de lados de los dos polígonos, o sea si n = 6, el área del polígono inscripto aumenta, mientras que el área del polígono circunscripto disminuye (fig. 2).

Llamando:

A_6: área del hexágono inscripto

A'_6: área del hexágono circunscripto

podemos escribir:

$A_3 < A_6 <$ área del círculo $< A'_6 < A'_3$

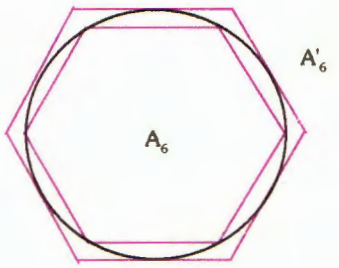


fig. 2

Si continuamos el procedimiento, aumentando el número de lados de los dos polígonos, obtendremos cada vez una mayor aproximación del área del círculo. Al cabo de n pasos se tendrá:

$$A_3 < A_6 < A_{12} < \ldots\ldots < A_m < \text{área del círculo} < A'_m < \ldots\ldots < A'_{12} < A'_6 < A'_3 \quad (m = 3 \cdot 2^{n-1})$$

donde las áreas de los polígonos inscriptos forman una sucesión creciente, mientras que las áreas de los polígonos circunscriptos forman una sucesión decreciente. El valor hacia el cual la primera sucesión crece y hacia el cual la segunda decrece, es el área buscada. Es decir, el límite común de estas dos sucesiones cuando $n \to \infty$, es el área del círculo de radio 1, que representamos con el símbolo π.

$$\pi = 3,\ 141592....$$

Área de una región limitada por una curva

Sea $y = f(x)$ una función continua y positiva en el intervalo [a, b] y sea R la región del plano limitada por el eje X, las rectas $x = a$, $x = b$ y la gráfica de la función (fig. 3).

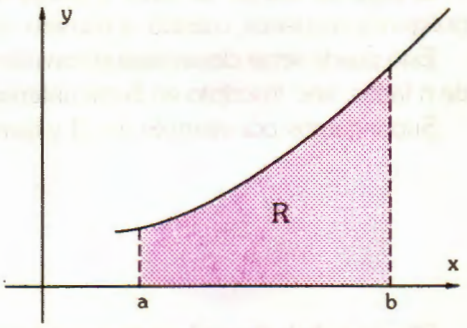


fig. 3

Dividamos el intervalo [a, b] en n subintervalos, iguales o no, por los puntos $x_0 = a$, $x_1 \ldots\ldots x_{n-1}$, $x_n = b$. Por ejemplo, si tomamos $n = 4$, los puntos $x_0 = a$, x_1, x_2, x_3 y $x_4 = b$, dividen al intervalo [a, b] en cuatro subintervalos:

$I_1 = [a, x_1]$ $I_2 = [x_1, x_2]$ $I_3 = [x_2, x_3]$ $I_4 = [x_3, b]$ (fig. 4).

En cada uno de estos cuatro subintervalos la función alcanza un valor mínimo m_i. Es decir, m_1 es el valor mínimo de $y = f(x)$ en I_1, m_2 en I_2, m_3 en I_3 y m_4 en I_4.

Tomando como base cada uno de estos intervalos y como altura el valor mínimo de la función en cada uno de ellos, determinamos cuatro rectángulos: R_1, R_2, R_3 y R_4 (fig. 4).

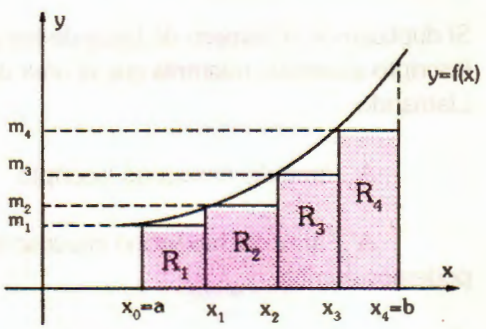


fig. 4

Observemos que la región limitada por cada uno de los rectángulos R_i, esta incluída en la región R y la suma de sus áreas, que es menor que el área de R, es una aproximación del área buscada (aproximación por defecto).

Luego, indicando con A (R_i) el área del rectángulo R_i y con A el área de la región R, podemos escribir:

$$A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) < A$$

Por otra parte, como y = f(x), también alcanza un valor máximo M_i, en cada I_i, podemos considerar los rectángulos R'_i, de base I_i, y altura M_i (fig. 5).

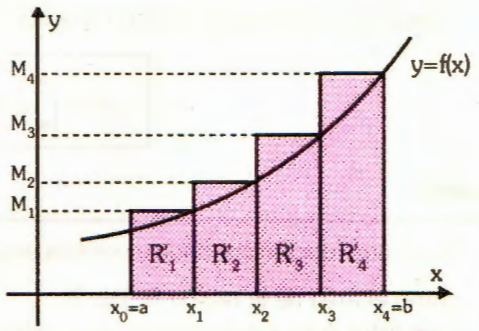


fig. 5

Se ve en este caso que la suma de las áreas de los R'_i supera al área de R, teniéndose entonces una aproximación por exceso del área buscada . Luego, indicando con A (R'_i) al área de R'_i podemos escribir:

$$A(R_1) + A(R_2) + A(R_3) + A(R_4) < A < A(R'_1) + A(R'_2) + A(R'_3) + A(R'_4)$$

Si aumentamos el número de puntos de subdivisión del intervalo [a, b], aumentará el número de rectángulos R_i y R'_i lográndose, con las respectivas sumas de áreas, una mejor aproximación, como se muestra en la figura 6 donde se ha considerado n = 8.

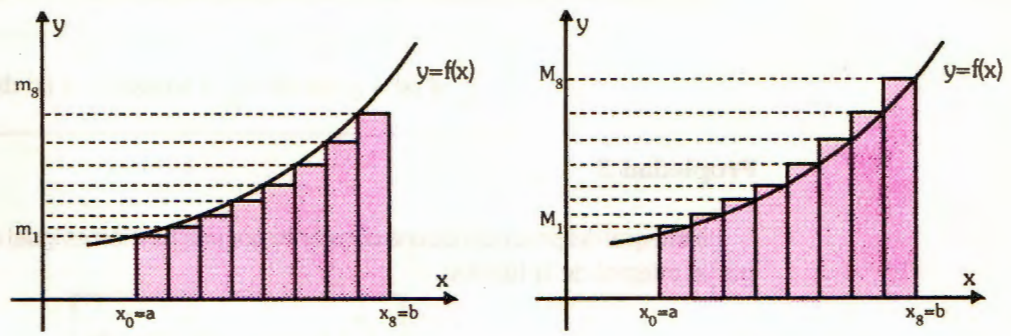


fig. 6

Más precisamente

llamando $S_n = A(R_1) + \ldots + A(R_n)$

y $S'_n = A(R'_1) + \ldots + A(R'_n)$

se tiene que:

$$S_4 < S_8 < A < S'_8 < S'_4$$

Si tomamos n = 16, se tendrá:

$$S_4 < S_8 < S_{16} < A < S'_{16} < S'_8 < S'_4$$

Si continuamos el procedimiento agregando cada vez más puntos de subdivisión al [a, b], de manera tal que las longitudes de los intervalos tiendan a cero, entonces tanto la sucesión creciente S como la sucesión decreciente S' tenderán al límite común A, es decir al área de la región R.

Llamaremos al área A, integral definida de f(x) entre los extremos a y b e indicaremos

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Luego:

Dada una función continua y positiva en un intervalo [a ,b] hemos definido $A = \int_a^b f(x)\,dx$ como el área de la región R (fig. 3).
Este valor A es independiente de la letra utilizada para indicar la variable, es decir:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$$

Observación: En la definición de integral hemos supuesto $f(x) \geq 0$ pero esta hipótesis no es en realidad necesaria.

Propiedades de la integral definida

Propiedad 1

La integral de la suma de dos funciones es igual a la suma de las integrales de las dos funciones.

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Propiedad 2

La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b (k\,f(x)) = k \int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedad 3

Si c es un punto intermedio del intervalo [a, b], entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Propiedad 4

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Propiedad 5

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Integral Indefinida

Si f es una función continua y positiva en el intervalo [a, b] y $x_1 \varepsilon$ [a ,b] entonces:

$\int_a^{x_1} f(u)\,du$ es el área de R_1 (fig. 7)

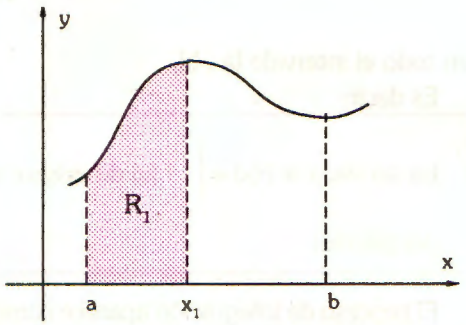
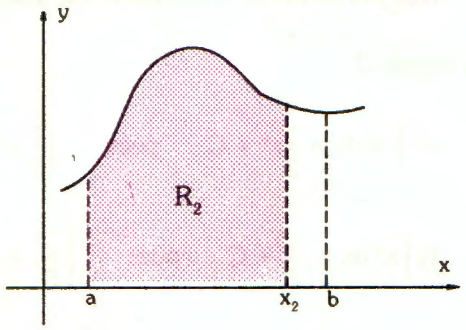


fig. 7

Si x_2 es otro punto del [a, b] distinto de x_1, entonces:

$\int_a^{x_2} f(u)\,du$ es el área de la región R_2 (fig. 8)



En general, si x es un punto cualquiera del intervalo [a y bl

$$\int_a^x f(u)\,du$$

es el área bajo la curva y = f(u) comprendida entre u = a y u = x luego,

a cada punto $x \in [a, b]$ podemos hacerle corresponder el valor $\int_a^x f(u)\,du$, quedando definida de esta manera la función:

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,du$$

La función F(x) se llama función integral de f(u).

Se demuestra que F(x) es continua en [a, b] y derivable y además se verifica que:

$$F'(x) = f(x)$$

en todo el intervalo [a , b].

Es decir:

La derivada de $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$ es igual al valor de f(u) en el punto x (Teorema fundamental del cálculo).

El proceso de integración aparece como el inverso de la derivación, pues, dada una función f consiste en hallar otra función F tal que F' (x) = f (x) para todo x en [a, b].

F se llama también una función primitiva o antiderivada o integral indefinida de f(x) y se simboliza:

$$\int f(x)\,dx$$

Si F(x) es una primitiva de f(x), también F(x) + C es una primitiva de f(x) pues:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x).$$

También se verifica la recíproca, es decir:

Dos primitivas de una función f(x) difieren en una constante.

Ejemplo 2

a) $\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$ pues $\left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{2}2x + 0 = x$

b) $\int x^4\,dx = \frac{x^5}{5} + C$ pues $\left(\frac{x^5}{5} + C\right)' = \frac{5x^4}{5} = x^4$

c) $\int \cos dx = \operatorname{sen} x + C$ pues $(\operatorname{sen} x + C)' = \cos x$

Tabla de primitivas

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{du}{u} = \ln u + C$$

$$\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$$

$$\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$$

$$\int e^u\,du = e^u + C$$

$$\int \sec^2 u\,du = \operatorname{tg} u + C$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 u\,du = -\operatorname{cotg} u + C$$

Para aplicar (A)

Completar utilizando la tabla de primitivas y comprobar los resultados por derivación:

1. $\int x^3\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...
2. $\int dx =$ ..... pues (.....)' = ...
3. $\int \operatorname{sen} x\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...
4. $\int e^x\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...
5. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...
6. $\int \frac{dx}{x} =$ ..... pues (.....)' = ...
7. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...
8. $\int \sec^2 x\,dx =$ ..... pues (.....)' = ...

Reglas de Integración

Como el proceso de integración es inverso al de derivación, cada una de las reglas de derivación se traduce en una regla de integración.

Integración de una suma de funciones

La integral de una suma de funciones es igual a la suma de las integrales de las funciones. Es decir:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

Esta regla de integración se deduce de la regla de derivación de una suma de funciones.

Ejemplo 1

$$\int (x^3 + x)\,dx = \int x^3\,dx + \int x\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + C$$

Integración del producto de una constante por una función

La integral del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante por la integral de la función.

Es decir:

$$\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

Esta regla de integración se deduce de la regla de derivación del producto de una constante por una función.

Ejemplo 2

$$\int 5x^3\,dx = 5\int x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + C$$

Para Aplicar (B)

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int (x^2 + 3x)\,dx =$ .....

2. $\int (2x^2 - \text{sen } x)\,dx =$ .....

3. $\int (1 + \cos x)\,dx =$ .....

4. $\int \left(\frac{3}{2}x^5 + \frac{5}{x}\right)dx =$ .....

5. $\int \left(2e^x + 4x^2 - 3\right) dx =$ .....

6 $\int \left(\sqrt{x} + 5 \cos x\right) dx =$ .....

Sug.: $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

7. $\int \left(\sec^2 x + \operatorname{sen} x\right) dx =$ .....

8. $\int (3 \operatorname{cosec}^2 x + 5^x)\, dx =$ .....

Integración por sustitución

La regla de derivación de la composición de funciones da lugar a este método, que consiste en efectuar un cambio conveniente de variables.

Ejemplo 3

Calcular $\int \cos \frac{x}{3} dx$.

Sustituimos

$$\frac{x}{3} = u \qquad y \qquad dx = \frac{du}{u'(x)} \qquad \left(dx = \frac{du}{\frac{1}{3}} = 3\, du \right)$$

en la expresión que queremos integrar:

$$\int \cos \frac{x}{3} dx = \int \cos u \,.\, 3\, du = 3 \int \cos u \,.\, du = 3 \operatorname{sen} u + C$$

reemplazando $u = \frac{x}{3}$
resulta:

$$\int \cos \frac{x}{3} dx = 3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} + C$$

Verificamos derivando:

$$\left(3 \operatorname{sen} \frac{x}{3} + C\right)' = \cancel{3} \cos \frac{x}{3} \,.\, \frac{1}{\cancel{3}} + 0 = \cos \frac{x}{3}$$

Ejemplo 4

Calcular $\int \frac{1}{x+2} dx$.

Sustituimos $x + 2 = u$ y $dx = \frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{1} = du$

en la expresión que queremos integrar:

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln u + C$$

reemplazando $u = x + 2$, resulta:

$$\int \frac{1}{x+2}\,dx = \ln|x+2| + C$$

Verificamos derivando la integral:

$$(\ln(x+2) + C)' = \frac{1}{x+2} + 0 = \frac{1}{x+2}$$

Ejemplo 5

Calcular $\int (2x+1)^{30}\,dx$.

Haciendo $2x + 1 = u$ y $dx = \frac{du}{u'(x)} = \frac{du}{2} = \frac{1}{2}du$

y sustituyendo en la expresión a integrar:

$$\int (2x+1)^{30}\,dx = \int u^{30} \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{2}\int u^{30}\,du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31}u^{31} + C$$

reemplazando $u = 2x + 1$, resulta:

$$\int (2x+1)^{30} = \frac{1}{62}(2x+1)^{31} + C$$

Verificamos derivando la integral:

$$\left(\frac{1}{62}(2x+1)^{31} + C\right)' = \frac{1}{62} \cdot 31 (2x+1)^{30} \cdot 2 + 0$$

$$= (2x+1)^{30}$$

Para aplicar ©

Calcular las siguientes integrales:

1. $\int \text{sen } 5x\,dx =$ .....

.....

2. $\int \frac{2}{x-1}\,dx =$ .....

.....

3. $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx =$ .....

.....

4. $\int (1 - 5x)^{22} dx =$ .....

.....

5. $\int \cos(2x - 4)\, dx =$ .....

.....

6. $\int 2x\sqrt{x^2 + 2}\ dx =$ .....

.....

Integración por partes

Este método de integración se deduce de la regla de derivación del producto de funciones. Es decir, si $f(x) = u(x).\ v(x)$ entonces, teniendo en cuenta la regla de derivación del producto de dos funciones es:

$$f'(x) = u'(x).\ v(x) + u(x)\ .\ v'(x)$$

luego, integrando ambos miembros:

$$\int f'(x)\, dx = \int (u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x))\, dx$$

y como $\int f'(x)\, dx = f(x)$

resulta:

$$f(x) = \int (u'(x)\, v(x)\, dx + \int u(x)\, v'(x)\ dx$$

entonces:

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = f(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx$$

o bien

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\ .\ v(x)\, dx$$

que es la fórmula de integración por partes.

Esta fórmula es útil cuando una función puede escribirse como producto de dos funciones y se conoce la primitiva de una de ellas.

Ejemplo 6

Calcular $\int x \operatorname{sen} x\, dx$

Tomando $u(x) = x$ y $v'(x) = \operatorname{sen} x$

resulta:

$u'(x) = 1$ y $v(x) = \cos x$

entonces:

$$\int x \operatorname{sen} x\, dx = -x \cos x - \int 1\ .\ \cos x\, dx = -x \cos x + \operatorname{sen} x + C$$

Ejemplo 7

Calcular $\int x\, e^x\, dx$

Tomando $u(x) = x$ y $v'(x) = e^x$

resulta:

$u'(x) = 1$ y $v(x) = e^x$

entonces:

$$\int x\, e^x\, dx = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x + C$$

$$= e^x (x - 1) + C$$

Para aplicar (D)

Calcular, utilizando el método de integración por partes, las siguientes integrales:

1) $\int x \ln x\, dx =$ (ver sug. 1) .....

.....

2) $\int x \sec^2 x\, dx =$ .....

.....

3) $\int e^x \left(x^2 + 2x \right) dx =$ (ver sug. 2) .....

.....

4) $\int \sqrt[3]{x} \ln x\, dx =$ .....

.....

5) $\int x \sqrt{1 - x}\, dx =$ .....

.....

6) $\int e^x \cos x\, dx =$ .....

.....

Sug. 1: tomar $u(x) = \ln x$ y $v'(x) = x$
Sug. 2: tomar $u(x) = x^2 + 2x$ y $v'(x) = e^x$.

Cálculo de la integral definida

Regla de Barrow

Si f es una función continua en el intervalo [a,b] y F es una primitiva cualquiera de f, entonces:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Como $\int_a^x f(u)\, du$ es una primitiva de f y por hipótesis es F una primitiva de f, se tiene:

$$\int_a^x f(u)\, du = F(x) + C \quad (1)$$

pues dos primitivas de una función difieren en una constante.
Reemplazando el extremo superior x por a:

$$\int_a^a f(u)\,du = F(a) + C$$

pero por ser

$$\int_a^a f(u)\,du = 0$$

resulta:

$$0 = F(a) + C$$

luego:

$$C = -F(a)$$

reemplazando en (1) C por - F(a):

$$\int_a^x f(u)\,du = F(x) - F(a)$$

y haciendo el extremo superior de integración igual a b:

$$\int_a^b f(u)\,du = F(b) - F(a)$$

o bien

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Aclaración: En el cálculo de integrales definidas utilizaremos la notación.

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Ejemplo 8

$$\int_1^2 3x^2\,dx = 3\int_1^2 x^2\,dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = 2^3 - 1^3 = 7$$

Ejemplo 9

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1$$

Para aplicar (E)

Calcular las siguientes integrales definidas:

1) $\int_0^3 -2x^2\,dx =$ .....

2) $\int_{-1}^2 (x+1)\,dx =$ .....

3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x\,dx =$ .....

4) $\int_0^1 (x^2 - x)\,dx =$ .....

5) $\int_{-1}^1 \sqrt[3]{x^2}\,dx =$ .....

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x\,dx =$ .....

8.3 CÁLCULO DE ÁREAS

En la definición de integral hemos partido del concepto de área de una región del plano. Es decir, hemos definido geométricamente la integral de una función, no negativa y continua, en un intervalo [a, b] como:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{Área de R (fig. 3).}$$

También hemos señalado que la hipótesis $f(x) \geq 0$, es innecesaria en la definición de integral como límite de las sucesiones S_n y S'_n.

Si $f(x) < 0$ en el intervalo de integración, su integral también es negativa.

Luego, para calcular el área de R (fig. 9), debemos cambiar el signo de la integral.

$$\text{Área de R} = -\int_a^b f(x)\,dx$$

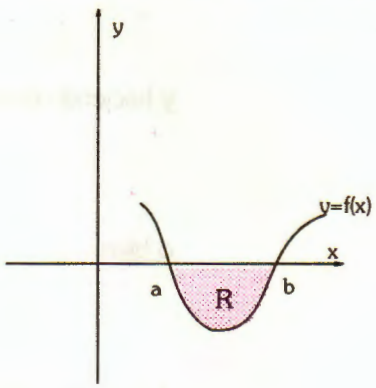


fig. 9

Si f es la función representada en la figura 10, para calcular el área A de la región sombreada, debemos hallar primero los puntos de intersección de la gráfica de f con el eje X.Luego será:

$A = \text{Área de } R_1 + \text{Área de } R_2 + \text{Área de } R_3$

es decir:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx$$

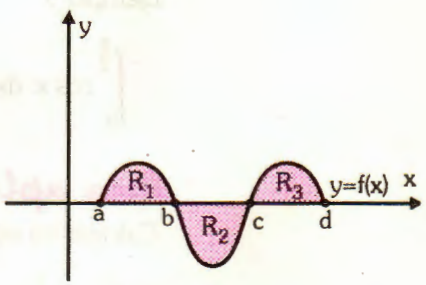


fig. 10

Ejemplo 1

Calcular el área encerrada por la curva $y = x^2 - 4$ y el eje X (fig . 1).

Hallamos las intersecciones de la curva con el eje X:

$x^2 - 4 = 0$ entonces $x = 2$ o $x = -2$

El área buscada será entonces:

$$A = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\,dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Big|_{-2}^{2} = -\left[\frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)\right] = \frac{32}{3}$$

luego:

$$\boxed{A=\frac{32}{3}}$$

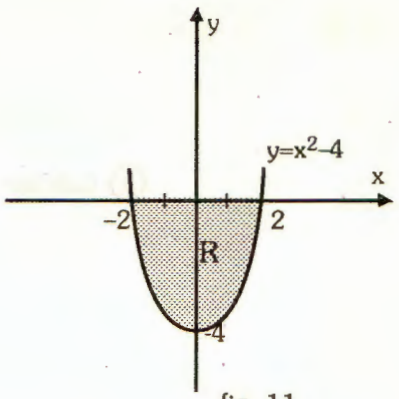


fig. 11

Ejemplo 2

Calcular el área limitada por y = cos x, el eje X y las rectas x = 0 y x = 2π (fig. 12).

Hallamos las intersecciones de la curva con el eje X:

cos x = 0 entonces $x=\frac{\pi}{2}$ o $x=\frac{3\pi}{2}$ en [0 , 2π]

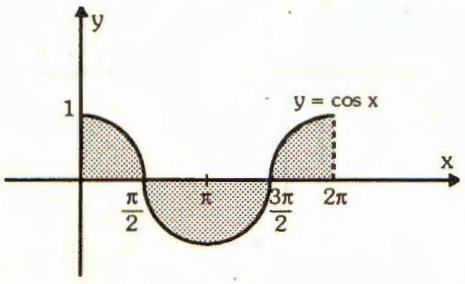


fig. 12

El área buscada será entonces:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\cos x\,dx+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\cos x\,dx=$$

$$=\operatorname{sen} x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\operatorname{sen} x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\operatorname{sen} x\Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}=$$

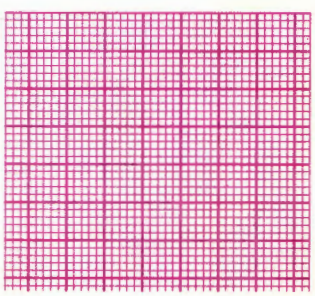
$$=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}-\operatorname{sen} 0-\left(\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}-\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right)+\operatorname{sen} 2\pi-\operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}$$

$$=1-0-(-1-1)+0-(-1)=4$$

luego:

$$\boxed{A=4}$$

Para aplicar (F)



(a) Calcular el área encerrada por la curva $y=-x^2+1$ y el eje X.

.....

.....

.....

.....

ⓑ Calcular el área encerrada por la curva y = sen x, el eje X y las rectas x = π y x = 2 π.

.....

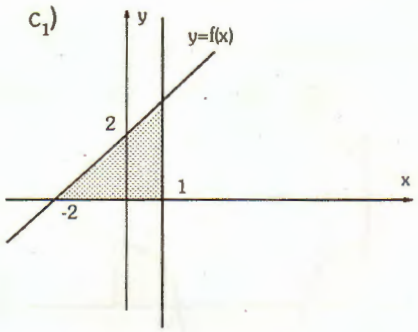
.....

.....

.....

ⓒ Calcular el área sombreada:

c_1)



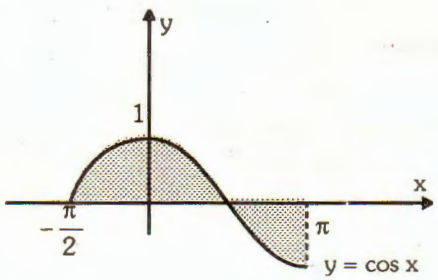
.....

.....

.....

.....

c_2)



.....

.....

.....

.....

Área encerrada entre dos curvas

Si f y g son dos funciones tales que sus gráficas se cortan en los puntos de abscisa x_1 y x_2 y $f(x) \geq g(x)$ en $[x_1, x_2]$ (fig. 13), entonces el área A encerrada entre las dos curvas se calcula como diferencia de las áreas bajo cada una de ellas.

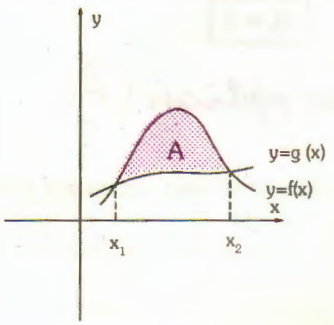


fig. 13

Es decir:

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} g(x)\,dx$$

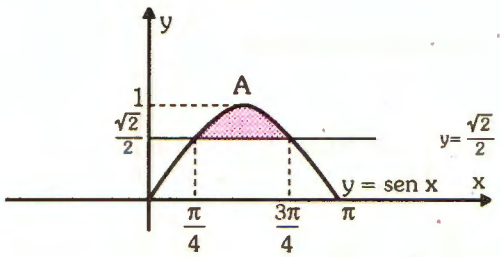
Ejemplo 3

Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \text{sen } x$ y $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ en el intervalo $[0, \pi]$.

1°) Determinamos las abscisas de los puntos de intersección de las curvas:

$$\text{sen } x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{entonces, en } [0, \pi], \text{ es } x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ y } x_2 = \frac{3\pi}{4}$$

2°) Determinamos gráficamente la región indicada:



3°) Calculamos el área A:

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \text{sen } x\,dx - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}\,dx = (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$= -\cos\frac{3\pi}{4} - \left(-\cos\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}\pi}{8} = \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}\pi}{8} = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

luego:

$$A = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

Ejemplo 4

Calcular el área entre $y = -x^2$ e $y = x - 2$.

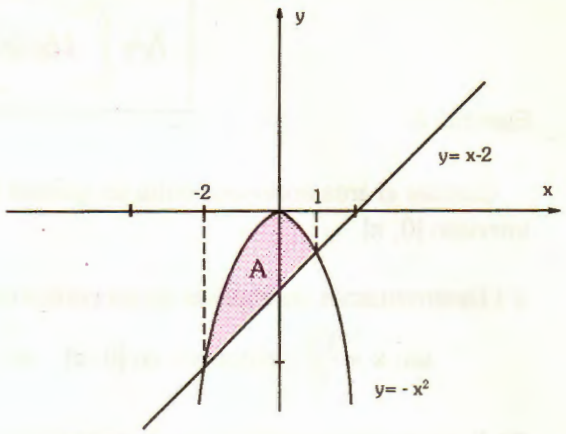
1°) Calculamos las abscisas de las intersecciones de las curvas, haciendo:

$$-x^2 = x - 2$$
$$-x^2 - x + 2 = 0$$

entonces:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{-2} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \end{matrix}$$

2°) Determinamos gráficamente la región indicada:



3°) Calculamos el área:

$$A = -\int_{-2}^{1} (x-2)\,dx - \left(-\int_{-2}^{1} -x^2\,dx\right) =$$

$$= -\int_{-2}^{1} (x-2)\,dx + \int_{-2}^{1} -x^2\,dx = -\left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Big|_{-2}^{1} + \left(-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}$$

$$= -\left[\left(\frac{1}{2} - 2\right) - \left(\frac{4}{2} + 4\right)\right] + \frac{-1}{3} - \frac{8}{3} = \frac{9}{2}$$

luego: $\boxed{A = \frac{9}{2}}$

Ejemplo 5

Calcular el área encerrada por las curvas $y = \cos x$ e $y = \cos 2x$ en el intervalo $[0,\pi]$

1°) Calculamos las abscisas de las intersecciones:

$\cos x = \cos 2x$

entonces

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x - \cos x = 0$

o bien

$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \qquad \cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$

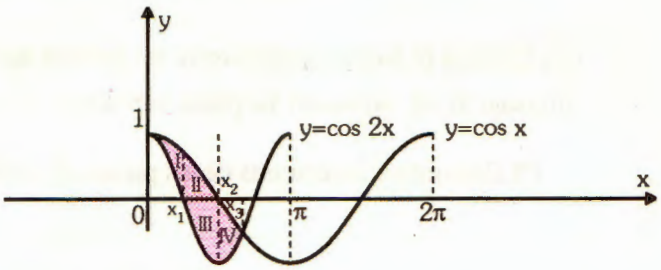
luego:

$\cos x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

o

$\cos x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2\pi}{3} \qquad$ en $[0\ ,\ \pi]$

2°) Determinamos gráficamente la región indicada



3°) Calculamos el área $A = A_I + A_{II} + A_{III} + A_{IV}$
Teniendo en cuenta que:

$$x_1 = \frac{\pi}{4}\,,\ x_2 = \frac{\pi}{2}\,,\ x_3 = \frac{2\pi}{3}$$

calculamos separadamente A_I, A_{II}, A_{III} y A_{IV}:

$$A_I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx =$$

$$\left(\text{Recordar} \quad \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x + C\right)$$

$$= \operatorname{sen} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$$

$$A_{II} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$$

$$A_{III} = -\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left(0 - \frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$A_{IV} = -\left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos 2x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \cos x\,dx\right] = -\left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} - \operatorname{sen} x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}}\right] =$$

$$= -\left[-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right] = -\left[-\frac{3\sqrt{3}}{4} + 1\right] = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4} - 1}$$

luego:

$$A = \frac{\sqrt{2}-1}{2} + \frac{2-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4} - 1 = \boxed{\frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

Para aplicar G

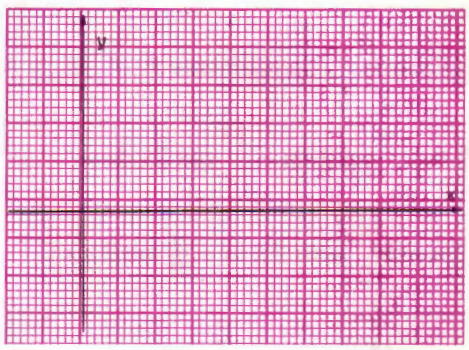
(a) Calcular el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = \cos x$ y $g(x) = \frac{1}{2}$, en el intervalo $[0, \pi]$, siguiendo los pasos indicados:

1°) Determinar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

.....

.....

2°) Determinar gráficamente la región indicada



3°) Calcular el área

.....

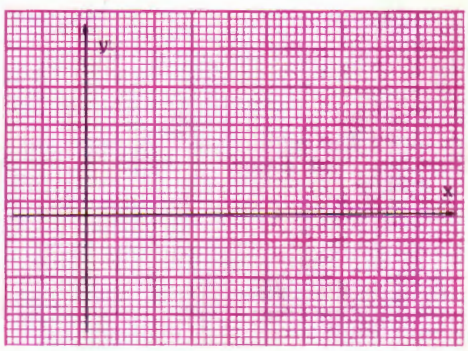
.....

(b) Calcular el área encerrada por las curvas $y = -x^2 - 1$ e $y = -3$ procediendo como en (a).

1°) Determinar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

.....

2°) Determinar gráficamente la región indicada.



3°) Calcular el área pedida

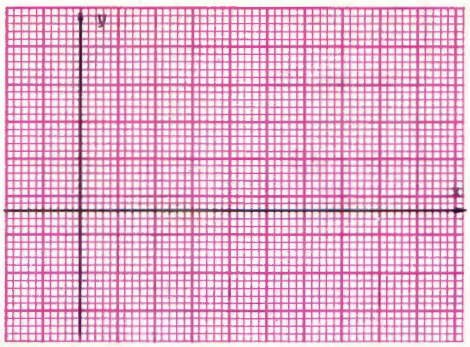
.....

(c) Calcular el área encerrada por las curvas $y = \cos x$ e $y = \text{sen } x$ en el intervalo $[0, \pi]$

1º) Determinar las abscisas de los puntos de intersección de las curvas.

.....

2°) Determinar gráficamente la región indicada.



3°) Calcular el área pedida.

.....

PARA EJERCITAR

1. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \sqrt[5]{x^4}\, dx =$ .....

b) $\int (3x^{-4} + x^{-2})\, dx =$ .....

c) $\int \left(\frac{2}{x^3} - \frac{2}{x} + \sec^2 x\right) dx =$ .....
(ver sug. 1)

d) $\int \sqrt{3x}\, dx =$ .....

e) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} + x\right) dx =$ .....

f) $\int \left(\frac{\sqrt[3]{x} + 1}{x}\right) dx =$ .....

g) $\int \left(\frac{3x^3 + x^2 - 2}{x^2}\right) dx =$ .....

h) $\int \left(\frac{1 - \sqrt{x}\, e^x}{\sqrt{x}}\right) dx =$ .....

i) $\int \left(\frac{\sqrt[5]{x} + x}{\sqrt{x}}\right) dx =$ .....

j) $\int (\operatorname{tg} x + 1)\, dx =$ .....

k) $\int (\sec^2 x - \operatorname{cosec}^2 x)\, dx =$ .....

l) $\int \left(\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 dx =$ .....
(ver sug. 2)

m) $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}\, dx =$ .....

(ver sug. 3)

n) $\int \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}\, dx =$ .....

Sug. 1: Escribir $\frac{2}{x^3}$ como $2x^{-3}$

Sug. 2: Desarrollar la potencia del binomio.

Sug. 3: Factorear.

2. Hallar la ecuación de la curva tal que la pendiente de la recta tangente en un punto x cualquiera es la función dada y que pasa por el punto indicado.

a) $f'(x) = x^2$, (1;2)

.....

b) $f'(x) = x + 1$, (-1 ; 1)

.....

c) $f'(x) = -3x^2 + x$, (0;2)

.....

d) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, (2;0)

.....

3. Dada $f'(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + 2x$, hallar el valor de f(2) sabiendo que f(1) = 2

.....

4. Dada $f'(x) = \text{sen } x$, hallar $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ sabiendo que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$

.....

5. Si $f''(x) = -\frac{1}{2}x$, hallar la ecuación de la curva sabiendo que pasa por el punto (1;1) y que su recta tangente tiene, en ese punto, una inclinación de 135°.

.....

6. Calcular las siguientes integrales utilizando el método de sustitución.

ⓐ $\int \sec^2 3x\, dx =$ .....

.....

ⓑ $\int \frac{\text{sen } x}{\cos^3 x}\, dx =$ .....

.....

ⓒ $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$ .....

.....

ⓓ $\int \text{sen } x \cos x \, dx =$ .....

.....

ⓔ $\int \sqrt{1+x} \, dx =$ .....

.....

ⓕ $\int 4x e^{x^2} dx =$ .....

.....

ⓖ $\int x(1+x)^5 dx =$ (ver sug. 1) .....

.....

ⓗ $\int \text{tg} \frac{1}{3} x \, dx =$ (ver sug. 2) .....

.....

ⓘ $\int \frac{1-5x}{3+x} dx =$ (ver sug. 3) .....

.....

Sug. 1: Tomar $u = x + 1$ $du = dx$

Sug. 2: Tomar $u = \frac{1}{3}x$ $3du = dx$, $3 \int \frac{\text{sen } u}{\cos u} du$

Sug. 3: Tomar $u = 3 + x$ $du = dx$ y $x = 3 - u$

7. Calcular las siguientes integrales, utilizando el método de integración por partes.

a) $\int x^3 \ln x \, dx =$ (ver sug. 1) .....

.....

b) $\int x \, 3^x dx =$ .....

.....

c) $\int x^2 \text{sen } x \, dx =$ .....

.....

d) $\int \text{sen}^2 x \, dx =$ (ver sug. 2) .....

.....

e) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$ = (ver sug. 3) .....

.....

f) $\int e^{3x}(x^2 + 1)dx$ = ...

.....

g) $\int x \sqrt{x + 5} \, dx$ = ...

.....

h) $\int e^{-x}(x - 5) \, dx$ = (ver sug. 4) .....

.....

i) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ = ...

.....

Sug. 1: Tomar u = ln x.
Sug. 2: Tomar u = sen x, v' = sen x
Sug. 3: Tomar u = ln x, v' = x
Sug. 4: Tomar u = x - 5, v' = e^{-x}

8. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_{-1}^{1} (3x - 1) \, dx$ = ...

b) $\int_{0}^{2} 2x^3 \, dx$ = ...

c) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} (2x^2 - x) \, dx$ = ...

d) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{cosec}^2 x \, dx$ = ...

e) $\int_{-1}^{0} (\sqrt[3]{x} + x) \, dx$ = ...

f) $\int_{0}^{1} e^x \, dx$ = ...

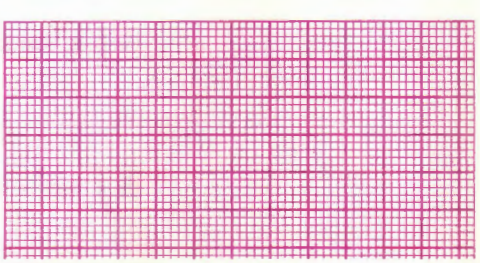
9. Calcular el área del polígono determinado por la recta y = 2x + 1, el eje Y, el eje X y la recta x = 3.

.....

.....

.....

.....



10. Hallar el área de la región limitada por:

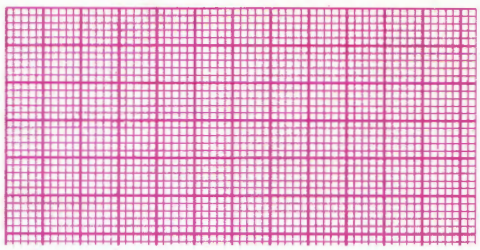
a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$,el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 0$

.....

.....

.....

.....



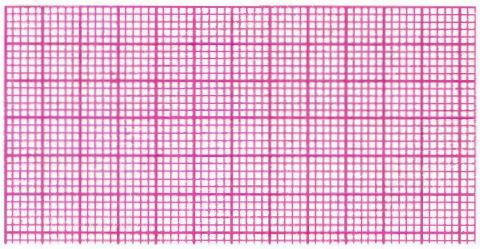
b) $y = x^2 - 6x + 9$, el eje X y las rectas $x = 2$ y $x = 0$

.....

.....

.....

.....



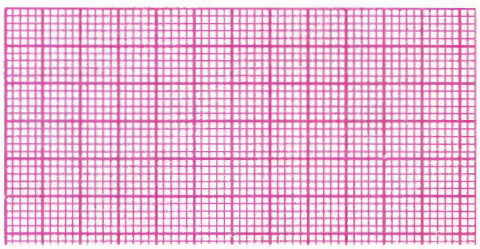
c) $y = 2^x$, el eje X y las rectas $x = -1$ y $x = 3$

.....

.....

.....

.....



11. Hallar el área limitada por la curva, el eje Y y las rectas dadas:

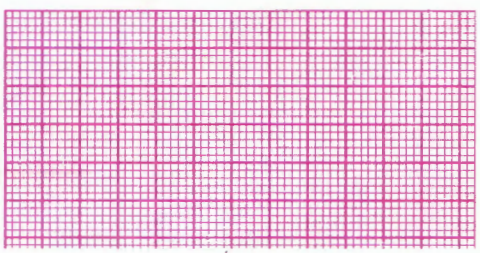
a) $y = -x^2 + 5$
$y = 1$

.....

.....

.....

.....



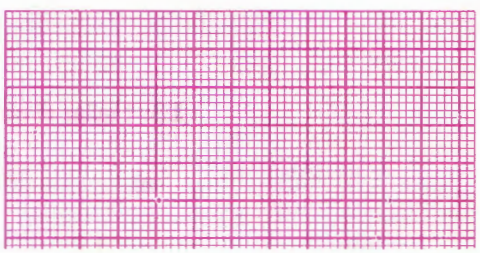
b) $y = x^3$
$y = 3$

.....

.....

.....

.....



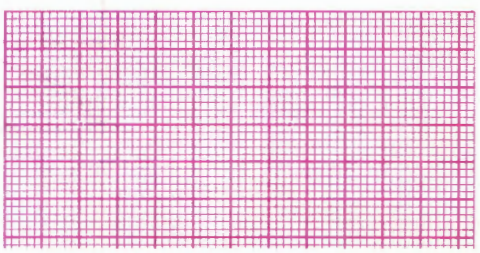
c) $y = x^2 + 2x + 1$
$y = 9$

.....

.....

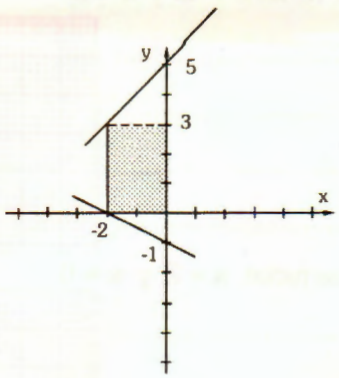
.....

.....

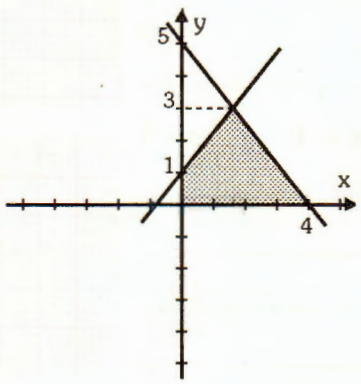


12. Hallar el área de la zona sombreada integrando las funciones correspondientes.

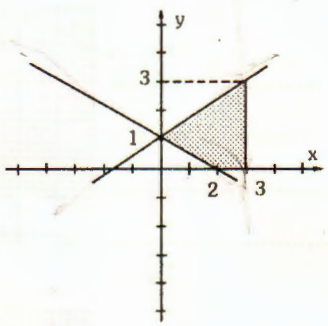
a)



b)

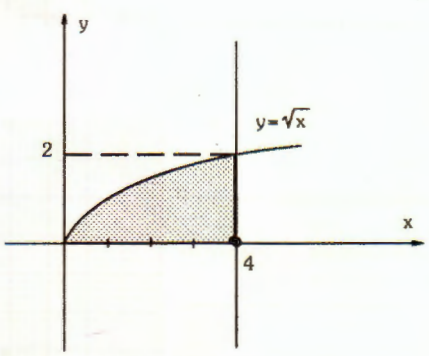


c)

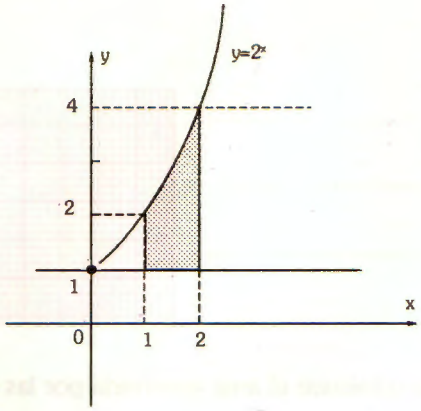


13. Hallar el área de la zona sombreada:

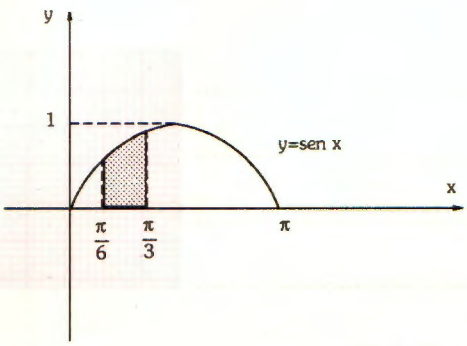
a)



b')



c)



14. Representar gráficamente y calcular el área limitada por y = f(x), el eje X y las rectas x = 0 y $x = \frac{\pi}{2}$ en cada uno de los siguientes casos:

a)

$y = \cos 2x$

b)

$y = 2 \operatorname{sen} x$

c)

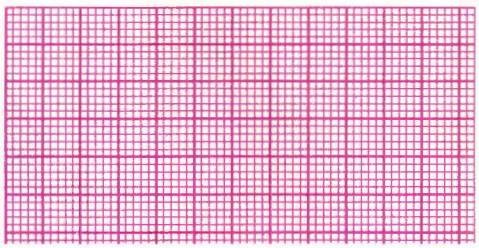
$y = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{4})$

.....

.....

.....

.....



15. Representar gráficamente y calcular el área encerrada por las curvas

$y = x^2 - 2x$

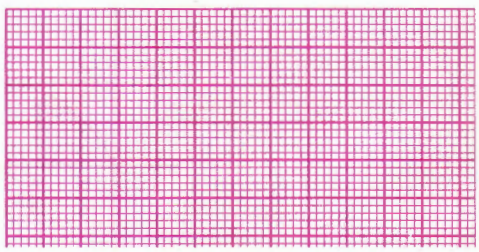
$y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$

.....

.....

.....

.....



16. Calcular el área encerrada entre:

$y = \cos x$

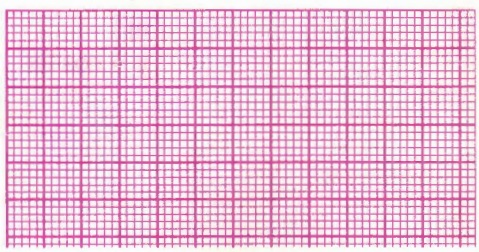
$y = \text{sen}\,\frac{1}{2}x$ en $[0, \frac{\pi}{2}]$

.....

.....

.....

.....



17. Calcular el área encerrada entre:

$y = \text{sen}\,x$

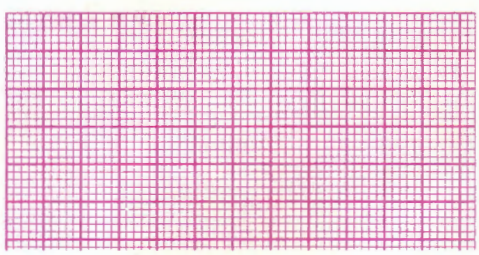
$y = \text{sen}\,2x$ en $[0, \pi]$

.....

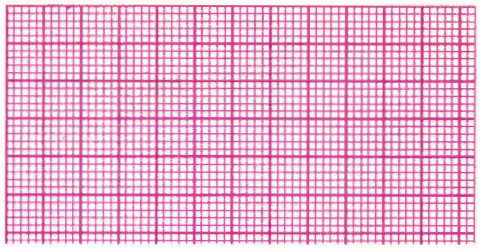
.....

.....

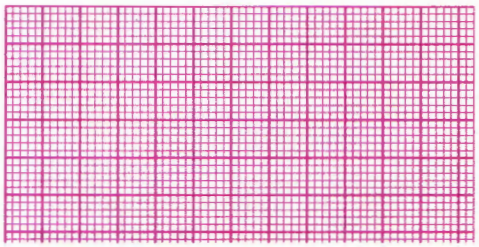
.....



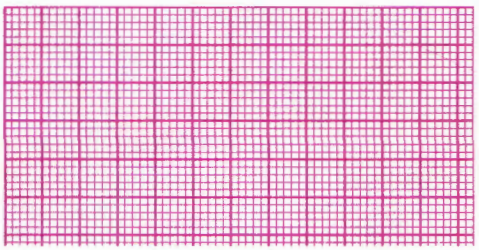
18. Hallar el área limitada por la curva $y = \frac{5}{x}$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.



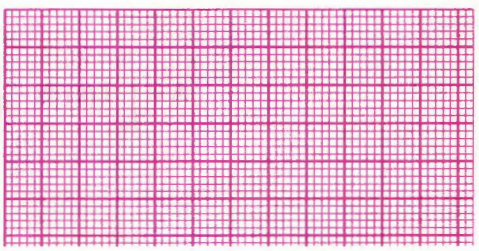
19. Calcular el área limitada por $y = \frac{1}{x}$ y la recta $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.



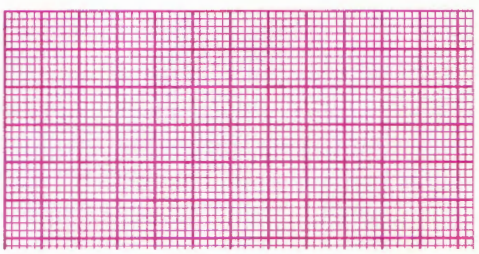
20. Hallar el área encerrada por la parábola $y = x^2 - x$ y la recta que pasa por los puntos (1; 2) y (-3; -6).



21. Hallar el área limitada por $y = x^3$ y la bisectriz del primer cuadrante.

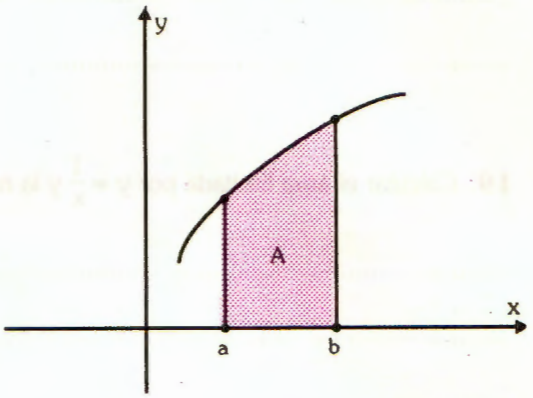


22. Hallar el área limitada por $y = \text{sen } x$ e $y = -\text{sen } x$ entre 0 y π.

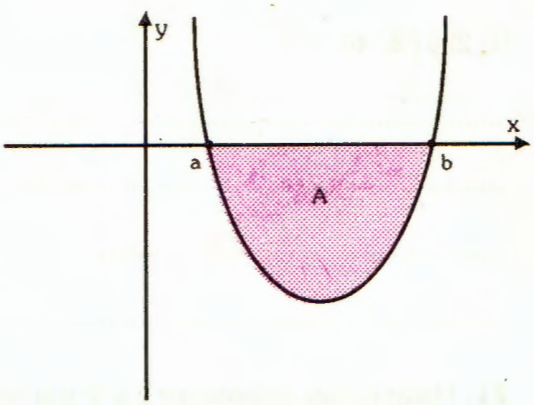


PARA RECORDAR

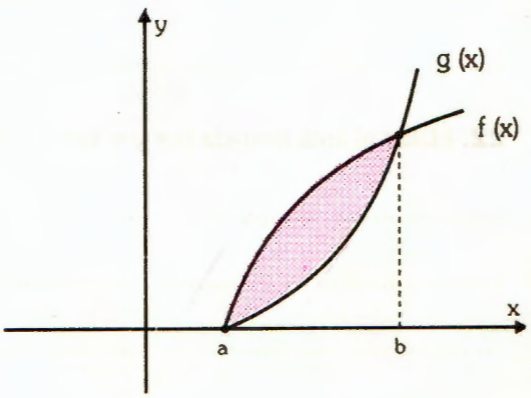
$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$



$$A = -\int_a^b f(x)\,dx$$



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$



PARA PRACTICAR

GUIA DE ESTUDIO I

1) Responder:

- ¿Cuántos minutos sexagesimales tiene un ángulo recto?
- ¿Con cuántos segundos sexagesimales se tienen 3°?
- En 25° 18', ¿cuántos segundos hay?
- ¿Cuántos grados sexagesimales hay en 500'?
- ¿Cuántos grados centesimales corresponden al ángulo de sentido negativo menor que un giro formado por la semirrecta inicial y la bisectriz del segundo cuadrante?
- ¿Cuántos minutos centesimales corresponden a un ángulo de un giro y tres cuartos?
- Si $\alpha = 2$ ¿a qué cuadrante pertenece?
- Si $\alpha = \frac{7\pi}{3}$ ¿Cuántos grados sexagesimales mide?
- ¿Cuántos minutos horarios tiene un ángulo llano?
- Si $\alpha = 3724^m$ ¿cuántas horas mide?

2) Completar:

	sexag.	centes.	circular	horario
α			$\frac{2\pi}{7}$	
β	67° 30'			
γ				27^h
δ		280^G		

3) Dadas las siguientes series de 3 ángulos ordenarlos de mayor a menor

a) $\alpha = 152^G\ 20^M$; $\beta = 136°\ 51'\ 40''$; $\delta = 9^h\ 7^m\ 56^s$

b) $\alpha = 504°\ 15'$; $\beta = 33^h\ 36^m\ 56^s$; $\delta = \frac{14\pi}{5}$

4) Obtener x:

a) $2x + 4^h\ 30^m - 15°\ 10' = 0$

b) $4\left(\frac{2\pi}{5} - 3x\right) = 12^G\ 53^M$

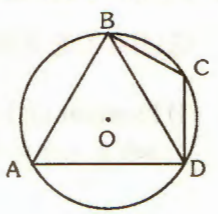
c) $4^h\ 56^m - 2bx = 37°x - 4b$

d) $\frac{32^G\ 20^M + 3x}{4} = \frac{2\pi}{9}$

5) ¿Cuántos radianes mide la suma de los ángulos interiores de un heptágono?

6) Obtener la longitud del arco $\overset{\frown}{CD}$.

Datos: $\overset{\Delta}{ABD}$ equilátero
4 cm = $\overline{OC}$ (mediatriz de $\overline{BD}$)



7) En un triángulo uno de sus ángulos mide $42^G\ 20^M$; otro mide el doble del anterior. Calcular el ángulo restante.

8) Sabiendo que en un triángulo isósceles el ángulo desigual mide $28^G\ 15^M$; calcular cuántos grados sexagesimales miden los otros ángulos.

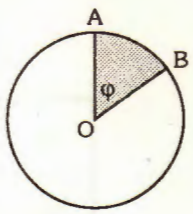
9) En un triángulo rectángulo uno de sus ángulos agudos mide $\frac{3\pi}{7}$. Calcular la semisuma de los otros dos ángulos.

10) Si las medidas de dos ángulos suman 30^G y su diferencia es de 8° 16' 48", ¿cuáles son esos ángulos?
(Expresar en grados centesimales)

11) Indicar a qué latitud tendría que estar ubicada una ciudad F para que la longitud del paralelo terrestre que pasa por la misma fuera las 3/4 partes del correspondiente a Bs. As.

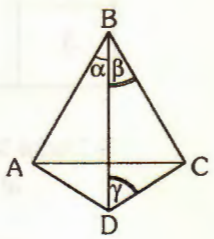
12) Calcular la superficie de la figura rayada.

$\overline{OA} = 12$ cm
$\varphi = 54° 20'$



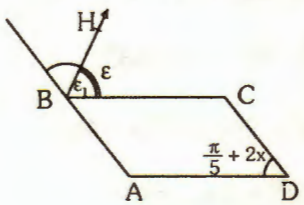
13) Calcular los ángulos interiores del ABCD.

ABCD romboide
$\alpha = 90° - 5x$
$\beta = 2x + 17^G\ 46^M$
$\gamma = \frac{\pi}{3}$



14) Dado el paralelogramo ABCD calcular el ángulo A.

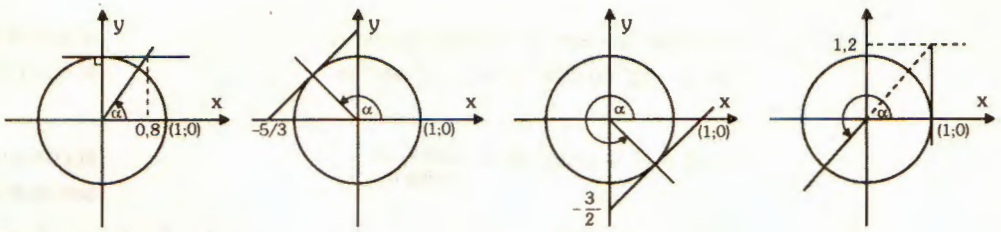
$\overrightarrow{BH}$ bisectriz de ε
$\varepsilon_1 = 10x + 6°$



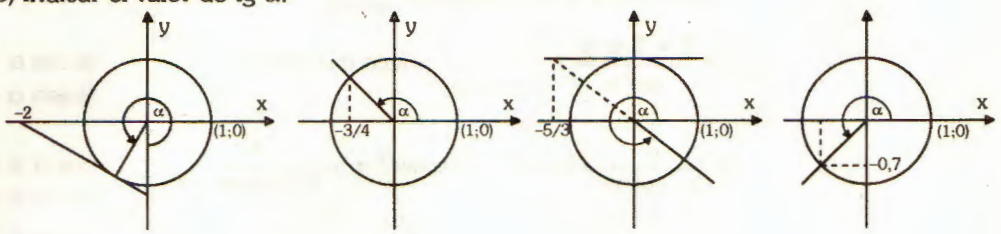
GUIA DE ESTUDIO II

1) Expresar en función de sec α:
sen α, cos α, tg α, cotg α, cosec α.

2) Indicar el valor de cos α:



3) Indicar el valor de tg α:



4) Determinar gráficamente α.

sen α = –0,3; tg α = $\frac{4}{7}$; sec α= 2,4; coses α = $\frac{5}{4}$

5) Calcular, sin conocer el ángulo, el perímetro del $\overset{\Delta}{BAC}$, rectángulo en A, sabiendo que sen γ = $\frac{2}{5}$ y b = 3 cm. Construirlo con los datos dados.

6) Calcular, sin conocer el ángulo, la superficie del $\overset{\Delta}{BAC}$, rectángulo en A, sabiendo que tg B = $\frac{7}{5}$ y que la hipotenusa del $\overset{\Delta}{BAC}$ es 1,2 cm. Construir el $\overset{\Delta}{BAC}$ utilizando solo los datos.

7) Si en $\overset{\Delta}{BAC}$, rectángulo en A, su superficie es de 14 cm^2 y cos γ = $\frac{2}{3}$, sin conocer el ángulo calcular sus tres lados.

8) Determinar las demás funciones de α siendo:

a) cos α = $\frac{5}{6}$ sen α < 0 y 0 < α < 2 π

b) cosec α = – $\sqrt{3}$ cos α < 0 y 0 < α < 2 π

c) sen α = $-\frac{3}{7}$ y $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) cotg α = $\frac{1}{2}$ y 0 < α < π

9) Obtener el valor de x:

a) x = (sen 60° – tg 60°) tg 30° (cosec 45°)^2

b) x sen 30° – tg 60° = sen 90° – x sen 60°

c) $x = \frac{\cos 45° - \text{tg } 60°}{\sec 45° - \text{tg } 30°}$

d) $\frac{3 \text{ cotg } 90° + 5 \sec 180° - 4 \cos 270°}{(\text{tg } 60°)^2 (\text{sen } 270°)\, x}$

e) x tg 60° + $\sqrt{8}$x = cotg^2 30° + x sec 45°

f) b$\sqrt{2}$ sen 45° – bx = (tg 45°) x – $\frac{1}{2}$ sec 60°

10) Demostrar las siguientes identidades :

a) $\operatorname{cosec}\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \operatorname{cosec}\alpha \cos^2\alpha$ si $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

b) $(1 - \operatorname{tg}^2\alpha)\cos^2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$ si $\cos\alpha \neq 0$

c) $\operatorname{tg}\alpha(1 + \operatorname{cotg}^2\alpha) = \dfrac{\operatorname{cosec}^2\alpha}{\operatorname{cotg}\alpha}$ si $\cos\alpha \neq 0$, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

d) $\sec^2\alpha \cos\alpha - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\sec\alpha}$ si $\cos\alpha \neq 0$

e) $\dfrac{1 + 2\operatorname{tg}\alpha}{\sec^2\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha} = (\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha)^2$ si $\cos\alpha \neq 0$, si $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

f) $\dfrac{2}{1 - \cos\alpha} + (\cos\alpha - 5)\operatorname{cosec}^2\alpha = \dfrac{-3}{1 + \cos\alpha}$ $\cos\alpha \neq 1$, $\cos\alpha \neq -1$, $\operatorname{sen}\alpha \neq 0$

11) Demostrar las fórmulas que relacionan los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos que difieren en $\frac{\pi}{2}$ suponiendo que α pertenece al segundo cuadrante.

12) Demostrar las siguientes identidades:

a) $\sec\alpha + \operatorname{cotg}(90° - \alpha) - \dfrac{\operatorname{sen}(90° - \alpha)}{1 - \cos(90° + \alpha)} = 0$ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq -1 \end{cases}$

b) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos\alpha} = \operatorname{cosec}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ si $\cos\alpha \neq 0$

c) $\dfrac{\operatorname{cosec}\alpha}{\operatorname{cotg}(180° + \alpha) - \operatorname{tg}(180° - \alpha)} = \cos\alpha$ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \end{cases}$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi + \alpha)}{\operatorname{sen}(-\alpha)} = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}{\cos(\pi - \alpha)}$ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \end{cases}$

e) $\dfrac{\sec\alpha + \operatorname{cosec}(\pi + \alpha)}{\sec(-\alpha) - \sec\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} = \dfrac{1 - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{cotg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)}$ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq \pm \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

f) $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}(\pi - \alpha)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ $\begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \end{cases}$

13) Indicar si son V o F las siguientes afirmaciones:

a) $\operatorname{sen}(180° + \alpha) = -\operatorname{sen}(180° - \alpha)$

b) $\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(180° + \alpha)$

c) $\operatorname{tg}(-\alpha - 90°) = \operatorname{tg}\alpha$

d) $\cos(270° + \alpha) = -\operatorname{sen}(-\alpha)$

e) $\operatorname{sen}(-180° + \alpha) = \operatorname{sen}(180° - \alpha)$

14) Comprobar que:

a) $\dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha\,(\sec^2\alpha+1)}{1+\cos^2(-\alpha)} = \operatorname{sen}^2(\pi-\alpha)\operatorname{cosec}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ $\quad \cos\alpha \neq 0$

b) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\alpha}{\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-\operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{cotg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\quad \begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq \pm \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

15) Decir si son V o F las siguientes identidades. Justificar.

a) $\cos(180°+\alpha) + \operatorname{sen}(90°-\alpha) - \operatorname{sen}(-\alpha) + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}(-\alpha)} = 0$ $\quad \operatorname{sen}\alpha \neq 0$

b) $\dfrac{\operatorname{cotg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)+1}{\sec\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha-\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha+\cos(\pi-\alpha)}$ $\quad \begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq \cos\alpha \end{cases}$

c) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{1+\operatorname{sen}\alpha\cos(90°-\alpha)}{\sec(-\alpha)\sec(180°+\alpha)}$ $\quad \cos\alpha \neq 0$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(-\alpha)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}(-\alpha)+\operatorname{cotg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)} = -\cos(-\alpha)$ $\quad \begin{cases} \cos\alpha \neq 0 \\ \operatorname{sen}\alpha \neq 0 \end{cases}$

16) Elegir la opción verdadera y justificar:

a) Sen 120° es igual a: 1) cos 60°, 2) cos 30°
b) Tg 60° es igual a: 1) tg 30°, 2) cotg 30°
c) – cotg 115° es igual a: 1) cotg 65°, 2) – cotg 65°
d) Cos 150° es igual a: 1) – cos 60°, 2) – cos 30°
e) Cos 50° es igual a: 1) sen 40°, 2) cos 130°
f) Sec 140° es igual a: 1) – cosec 40°, 2) –cosec 50°

17) Obtener x:

a) $\operatorname{sen}(2x+30°) = \operatorname{sen}(x+60°)$ $\quad$ si $0 \leq 2x+30° \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $0 \leq x+60° \leq \dfrac{\pi}{2}$

b) $\operatorname{cotg}(3x+20°) = \operatorname{tg}(2x+55°)$ $\quad$ si $0 \leq 3x+20° \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $0 \leq 2x+55° \leq \dfrac{\pi}{2}$

c) $\sec(50°-x) = \operatorname{cosec}(20°+5x)$ $\quad$ si $0 \leq 50°-x \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $0 \leq 20°+5x \leq \dfrac{\pi}{2}$

d) $\cos(3x-8°) = \cos(2x+20°)$ $\quad$ si $0 \leq 3x-8° \leq \dfrac{\pi}{2}$ y $0 \leq 2x+20° \leq \dfrac{\pi}{2}$

18) Resolver las siguientes ecuaciones, si $0° \leq x < 360°$:

a) $\cos x + \dfrac{3}{2}\operatorname{tg} x = 0$

b) $3\sec x - \dfrac{1}{\cos^2 x} = 2$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg}^2 x} = \operatorname{sen} x \sec x$

d) $\dfrac{1 - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\operatorname{sen} x} = \operatorname{tg} 30°$

e) $\sqrt{3}\ \cos x + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec 60°$

f) $\sqrt{2}\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 1$ (x pertenece al primer cuadrante)

g) $\operatorname{sen} x + 4 = 5 \operatorname{cosec} x$

19) ¿Cuánto valen los ángulos agudos γ y β del $\overset{\Delta}{BAC}$ rectángulo, si $\cos \beta = \frac{3}{2} \operatorname{tg}(90° - \gamma)$

20) Si los ángulos agudos γ y β de un triángulo rectángulo cumplen que $\sec \gamma = 2 \cos(90° - \beta)$.
¿Cuánto vale $2\ \operatorname{tg}^2 \alpha$?

21) Hallar K, sabiendo que:

a) $\operatorname{sen} \alpha = 2K + 1$ y $\sec \alpha = \frac{2}{K}$

b) $\cos \alpha = \frac{1}{3}\sqrt{2}$ y $\operatorname{tg} \alpha = 3K$

c) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{K\sqrt{2}}{2}$ y $\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{K}$

22) Desarrollar

a) $\dfrac{\operatorname{cotg}^2 160° + 1}{\operatorname{cosec}^2 110° \cdot \cos 70°}$ si $\operatorname{sen} 20° = 2h$ y $h \neq 0$

b) $\dfrac{\sec 195° + \operatorname{cosec} 255°}{\operatorname{sen} 75° - \cos 165°}$ si $\sec 15° = b$

c) $\dfrac{\operatorname{tg} 50° - \operatorname{cotg} 140° + \operatorname{tg}(-130°)}{1 + \operatorname{cotg} 320°}$ si $\operatorname{tg} 230° = 3K$ si $3K \neq 0$

23) Elegir la opción correcta. Justificar.

a) $\operatorname{sen} 3420° + \cos(-330°) + \operatorname{sen} 300° =$ 1) 0; 2) 3

b) $\dfrac{\operatorname{tg}(-870°) - \operatorname{tg} 1680°}{\operatorname{tg} 210°} =$ 1) 2; 2) −2

c) $\left(\operatorname{sen}\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \sec^2\left(\frac{-7\pi}{4}\right) =$ 1) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$; 2) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$

24) Calcular x si $0 \leq x \leq \pi$.

a) $\dfrac{\cos x - 2 \cos 120°}{\cos 240° - \cos 180°} = 1$

b) $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4} \cdot \operatorname{cosec}\left(\frac{-5\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{7\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\dfrac{-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen} 270°} = 1$

d) $\dfrac{\cos x + \cos\frac{2\pi}{3}}{\cos x + \cos\frac{3\pi}{2}} = 2$

25) Obtener un par de valores de x e y, ángulos agudos menores que un giro gue satisfacen los siguientes sistemas

a) $\begin{cases} 2 \operatorname{sen} x + \cos^2 y = \frac{3}{2} \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2 \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 (90° - y) = 2 \\ \cos x + \operatorname{sen}^2 y = 1 \end{cases}$

26) Obtener x:

a) $\log_{\sqrt{3}\operatorname{sen} x} 3 = 2$ si $\operatorname{sen} x > 0$

b) $(\log_2 \operatorname{sen} x)^2 + 2 \log_2 \operatorname{sen} x = -1$ $\operatorname{sen} x > 0$

c) $\log_{\operatorname{sen} x} 1 + \log_{\operatorname{sen} x} \cos x = 1$ $\operatorname{sen} x > 0, \operatorname{sen} x \neq 1, \cos x > 0$

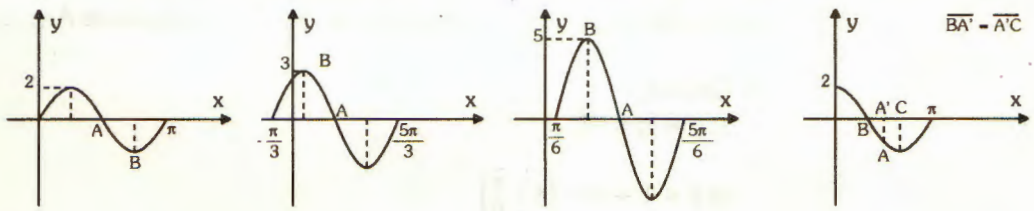
d) $\log_2 \operatorname{sen} (\pi - 30°) = x$

e) $2^{\operatorname{sen} x} \cdot 8 = 2^{\sec 60°}$

f) $(\operatorname{tg} x)^{2 \cos x} = \operatorname{cotg} x$ si $\cos x \neq 0$ y $\operatorname{sen} x \neq 0$

GUIA DE ESTUDIO III

1) Expresar, en sistema circular, abscisa de A y abscisa de B en las siguientes sinusoides:



2) Dar la fórmula para cada uno de los gráficos de las funciones del ejercicio anterior.

a) y =

b) y =

c) y =

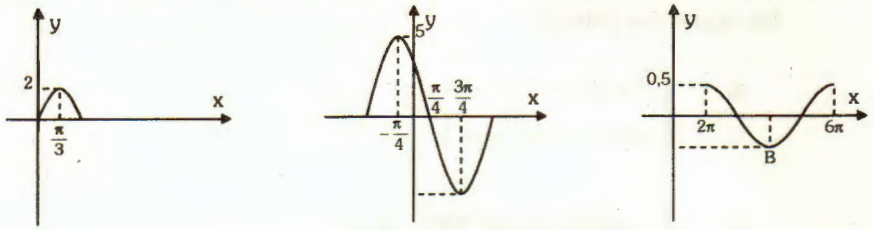
d) y =

Sugerencia: recordar $\frac{2\pi}{B} = T$.

3) Completar teniendo en cuenta los gráficos del ejercicio 1.

Gráfico	Amplitud	Pulsac.	Período	Ang. de fase
a				
b				
c				
d				

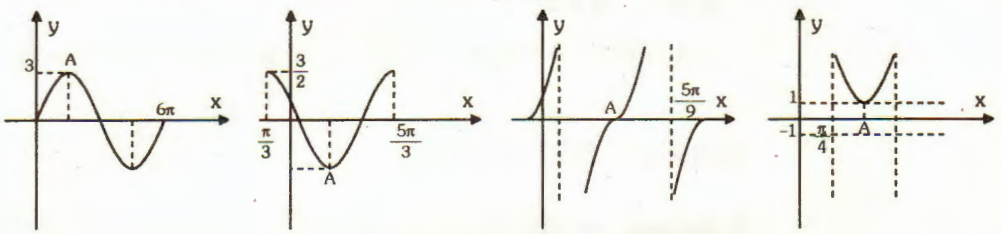
4) Dar las expresiones de las siguientes funciones del tipo $y = A \cos (Bx + C)$.



5) Completar teniendo en cuenta los gráficos del ejercicio 4:

	Amplitud	Pulsac.	Período	Ang. de fase
a				
b				
c				

6) Completar e indicar el valor de la abscisa de A:



y = ...sen..... abscisa de A:.....

y = ...cos..... abscisa de A:.....

y = tg..... abscisa de A:.....

y = cosec..... abscisa de A:.....

7) Graficar:

a) $y = \text{tg}\, x - 1$

b) $y = 1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

c) $y = -1 + \text{sen}\, \frac{1}{2}\, x$

d) $y = -\frac{1}{3} + 2 \cos x$

8) Resolver gráficamente: (Para $0 \leq x \leq \pi$)

a) $\begin{cases} y = \text{tg}\, x \\ y = \text{sen}\, x \end{cases}$

b) $\begin{cases} y = \cos x \\ y = \text{cotg}\, x \end{cases}$

c) $\begin{cases} y = \text{sen}\, 2x \\ y = \frac{1}{2} \cos x \end{cases}$

9) Hallar los valores de x tal que $0 \leq x < 2\pi$ para los cuales $\text{sen}\, x < \cos x$. Graficar.

10) Calcular: (Ángulo del primer cuadrante)

a) sen [arc tg $\frac{1}{3}$] =

b) tg [(arc sen ($\frac{3}{5}$)] =

c) arc sen (sen $\frac{7\pi}{6}$) =

d) arc cos (tg $\frac{3\pi}{4}$) =

11) Obtener x.

a) x + arc sen 1 = arc cos [tg (arc cos $\frac{\sqrt{3}}{3}$) + tg 150°]

b) x − arc cos ($\frac{\sqrt{2}}{2}$) − arc sen ($-\frac{1}{2}$) = arc tg ($-\sqrt{3}$)

c) $2^{\text{sen [arc cos x]}} = 2$

GUIA DE ESTUDIO IV

1) Hallar K y determinar $|\vec{B}|$ en cada caso:

a) $\vec{A} = 3i + 2j$
$\vec{B} = Ki + (K-2)j$
$\vec{A} \times \vec{B} = 5$

b) $|\vec{A}| = 5$
$|\vec{B}| = |K|$
sen $(\vec{A}; \vec{B}) = \frac{3}{5}$
$\vec{A} \times \vec{B} = -2$

c) $\vec{A} = i - 2j$
$\vec{B} = Ki + 2j$
$\vec{A} \perp \vec{B}$

d) $\vec{A} = 2i + j$
$\vec{B} = 2Ki + (3-K)j$
$\vec{A} \perp \vec{B}$

2) Determinar en cada caso los componentes de los vectores:

a) $\vec{A} = -i + 3j$
$\vec{B} = Ki + (K-1)j$
$\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen la misma dirección

b) $\vec{A} = \sqrt{12}\, i + 2j$
$\vec{B} = -Ki + j$
Áng. $(\vec{A}, \vec{B}) = 120°$

c) $\vec{A} = \frac{1}{2}Ki + 2j$
$\vec{B} = 2Ki + (1-K)j$
$\vec{A} \times \vec{B} = 2$

d) $\vec{A} = (K-1)i + Kj$
$\vec{B} = (K+1)i - 2j$
$\vec{A} \perp \vec{B}$

3) Calcular el ángulo $(\vec{A}; \vec{B})$:

a) $\vec{A} = 5Ki$
$\vec{B} = i - j$
áng $(\vec{A}; \vec{B}) = \frac{K\pi}{2}$

b) $\vec{A} = \frac{1}{2}i + \frac{\sqrt{12}}{4}j$
$\vec{B} = 4i - \sqrt{48}\, j$
ángulo $(\vec{A}; \vec{B}) = K\pi$

4) Calcular sen 165° y cos 165° (considerar 165° = 120° + 45°).

5) Calcular sen, cos y tg de (−255°). (considerar − 255° = − 225° − 30°).

6) Calcular sen, cos y tg de 285° (285° = 315° − 30°).

7) Sabiendo que α y β son ángulos del $\overset{\Delta}{ABC}$ rectángulo; deducir cos ($\alpha - 2\beta$) en función de β.

8) Si α y β son los ángulos agudos de un $\overset{\Delta}{ABC}$ rectángulo deducir sen $(2\alpha + \beta)$ en función de α.

9) Sabiendo que los ángulos agudos α y ß,pertenecen al $\overset{\Delta}{ABC}$ rectángulo, si sen $\alpha = \frac{1}{4}$ obtener sen $(2\alpha - \beta)$.

10) Demostrar que si $\alpha + \beta = 180°$, $\cos(\alpha - \beta - \gamma) = 2\,\text{sen}^2\beta\cos\gamma - \cos\alpha +$
$+2\,\text{sen}\,\beta\cos\beta\,\text{sen}\,\gamma$.

11) Verificar:

a) $\text{sen}(\alpha - \beta - \gamma) = \text{sen}\,\alpha\cos(\beta + \gamma) - \cos\alpha\,\text{sen}(\beta + \gamma)$

b) $\cos(\alpha - \beta - \gamma) = \cos\beta\cos(\alpha - \gamma) - \text{sen}\,\beta\,\text{sen}(\alpha + \gamma)$

12) Comprobar que:

a) Si $\alpha + \beta = 60°$ entonces $\text{sen}(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(-\sqrt{3}\cos 2\alpha + \text{sen}\,2\alpha)$

b) Si $\alpha + \beta = 30°$ entonces $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\cos 2\alpha + \text{sen}\,2\alpha)$

13) Calcular sen, cos y tg de 112° 30' y de 157° 30' utilizando las fórmulas del ángulo mitad.

14) Si $\text{sen}\,\alpha + \cos\alpha = K$ obtener en función de cos α, cos 2 α.

15) Verificar las siguientes identidades:

a) $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2\sec\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ $\quad \begin{cases} \text{sen}\,\alpha \neq 0 \\ \cos\alpha \neq \pm 1 \end{cases}$

b) $\dfrac{1 - \cos 4\,\alpha}{2} = \text{sen}^2\,2\,\alpha$

16) Calcular x: $(0° \leq x \leq 360°)$

a) $\dfrac{\text{sen}\,2x + \text{sen}\,x\cos x}{2} = \cos^3 x$

b) $\cos(x - 45°) = \dfrac{\cos x - \text{sen}\,x + 1}{\sqrt{2}}$

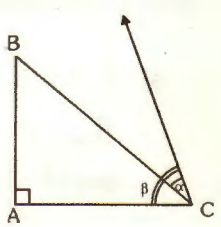
c) $\text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \cos x$

17) Calcular $\overline{BA}$

$\cos\beta = \frac{1}{3}$

$\text{sen}\,2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\overline{BC} = 8$ cm



18) Obtener x: $(0° \leq x < 600°)$

$$\begin{cases} \text{sen } \frac{x}{2} = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

19) Responder V o F. Justificar.

a) $\text{cotg } 2\alpha = \dfrac{\text{cotg } \alpha + \text{cotg } (90° + \alpha)}{2}$ $\quad \begin{cases} \text{sen } \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$

b) $\dfrac{\text{sen } 2\alpha}{\text{sen } \alpha} - \dfrac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha} = \text{sen } \alpha - \cos \alpha$ $\quad \begin{cases} \text{sen } \alpha \neq 0 \\ \cos \alpha \neq 0 \end{cases}$

20) Transformar en producto:

a) $\dfrac{1 - \text{sen } x}{2 + \cos x}$

b) $\dfrac{\text{tg } x - 1}{\text{tg } x + 1}$

c) $\dfrac{\text{sen } 5x + \text{sen } x}{\cos 5x + \cos x}$

21) Dados

$z_1 = \cos 10° + i \text{ sen } 10°$
$z_2 = -4 - 4i$
$z_3 = -3i$

Obtener: a) $\frac{z_2}{z_3}$ b) $z_1^{\,9}$ c) $\sqrt[5]{z_2}$

GUIA DE ESTUDIO V

1) Calcular el valor de x: $(0 < x < \frac{\pi}{2})$

a) $\text{sen } (x - 40°) = \frac{1}{8}$

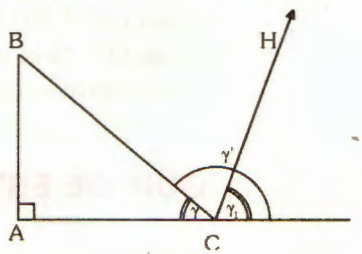
b) $\text{cosec } (2x - 10°) = 5{,}2$

c) $\cos x - \text{tg}^2 x = 0$

d) $4 \cos x + 2 \sec (\pi + x) = 1$

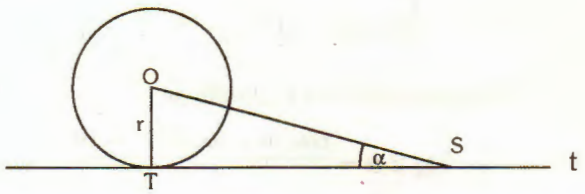
2) Si el área de $\overset{\Delta}{ABC} = 12\sqrt{3}$, el lado a = 6 y el lado b = 8, calcular el lado c.

3) Si $\overrightarrow{CH}$ es la bisectriz de γ' adyacente de γ y γ_1, supera en 30° 15' a γ. Calcular $\overline{AB}$, y $\overline{BC}$ sabiendo que $\overline{AC} = 12$ cm.



4) En el triángulo $\overset{\Delta}{BAC}$ rectángulo isósceles se ha trazado por el punto M ($M \in \overline{CA}$) una paralela al lado $\overline{AB}$ que determina sobre $\overline{BC}$ el punto N. Sabiendo que la superficie de $\overset{\Delta}{BAC} = 8 \text{ cm}^2$ y que la distancia de M a C es la tercera parte de la distancia de A a M. Calcular $\overline{NC}$.

5) Calcular la longitud de la circunferencia C (o; r), sabiendo que $\alpha = x\frac{\pi}{12}$, $\overline{OS}$ = 4 cm y T es tangente a la C (o, r) en el punto T.



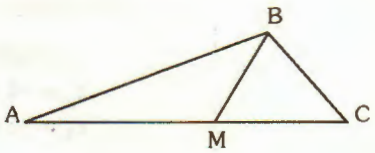
6) Calcular el ángulo que determinan las diagonales de un trapecio rectangular de 6 cm de altura si sus bases miden 5 cm y 10 cm.

7) Un niño se balancea en una hamaca cuyo asiento dista 40 cm del piso cuando la hamaca está en reposo. Si las cuerdas que la sujetan (perpendiculares al asiento) tienen una longitud de dos metros; ¿ a qué distancia del piso se encuentra el niño cuando las cuerdas forman un ángulo de 60° con respecto a la vertical?

8) En el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ isósceles el ángulo opuesto a la base satisface la ecuación

$tg^2x + \frac{2}{\text{cotg } x} = -1$. Si la base vale 10 ¿Cuál es el perímetro del $\overset{\Delta}{ABC}$?

9) Datos: $\overline{AC} = 10$
ang.ABM = 40°
ang BAM = 20°
Obtener la mediana $\overline{BM}$.



10) Obtener el perímetro del triáingulo determinado por las rectas y = – x + 2 ; y = 2x + 5 y el eje de abscisas.

11) Dadas dos circunferencias concéntricas de radio 6 y 10 respectivamente, si P ε C (0; 6) y Q ε C (0,10) y el ángulo que tiene por vértice a Q y cuyos lados pasan por O y P vale 15°; calcular la distancia de P a Q.

12) Dos niños situados a una distancia de 80 metros uno de otro en terreno plano, miran un helicóptero. Los ángulos de elevación de cada uno son 75° y 80° respectivamente. Si el helicóptero y los niños están en el mismo plano vertical, calcular la altura en la que está el helicóptero.

13) Dos observadores situados al sur de un monumento dirigen la visual a la cúspide del mismo, el ángulo de elevación es de 40°. Uno de ellos se corre sobre el terreno en dirección N 80° E y cuando vuelve a dirigir la visual al monumento, el ángulo de elevación es de 60°. Si el monumento tiene 25 metros de altura ,¿cuál es la distancia última entre los dos observadores?

GUIA DE ESTUDIO VI

1) Indicar los intervalos definidos por los siguientes conjuntos y representar gráficamente:

a) $\{x \in R / |3x - 2| < 2\}$

b) $\{x \in R / \left|2x - \frac{1}{3}\right| \geq 1\}$

c) $\{x \in R / \left|\frac{x+3}{3}\right| \leq \frac{3}{2}\}$

d) $\{x \in R / |9 - 2x| > 4\}$

2) Calcular los siguientes límites:

2) Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^3 + 2x}{3x^2} =$

b) $\lim_{x \to 1} \frac{x^5 - 1}{x - 1} =$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } 4x}{3x} =$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{5 - \sqrt{25 - x^2}}{x} =$

e) $\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x-2} - 1}{x - \sqrt{2x+3}} =$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} =$

g) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x \text{ sen } x} =$

h) $\lim_{x \to -7} \frac{-x^2 - 9x - 14}{2x^2 + 12x - 14} =$

3) Analizar los puntos de discontinuidad:

a) $f(x) = \frac{2x}{4x + 2x^2}$

b) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x}$

c) $f(x) = x - E(x)$

d) $f(x) = \frac{x - x^3}{1 - x^2}$

4) Determinar asíntotas y graficar las siguientes curvas:

a) $f(x) = \frac{x^2 + 9 - 6x}{x^2 - 9}$

b) $f(x) = \frac{x}{x - 2}$

c) $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 - x}$

d) $f(x) = \frac{2x + 1}{1 - 4x^2}$

5) Obtener la ecuación de las asíntotas de:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 1}$

b) $f(x) = \frac{3x^3 + 2x}{x^2 + x}$

c) $f(x) = \frac{-2x^2 + x}{x - 1}$

6) Representar y determinar, si existen, puntos de discontinuidad de:

a) $f(x) = \frac{6x^2 + 3x^4}{3x^2}$

b) $f(x) = |x - 4|$

c) $f(x) = \frac{1}{x^3}$

d) $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x}$

f) $f(x) = \frac{3x - x^2}{x}$

7) Indicar (si existen) puntos de discontinuidad en la siguientes funciones. Representarlas.

a) $\begin{cases} f(x) = 3^x & \text{si } x > 0 \\ f(x) = 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = -x + 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} f(x) = x^2 - 4x + 5 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

8) Determinar los puntos de discontinuidad de $f(x) = \text{tg } 2x$ en $[0, \pi]$.

9) Dada la funcion $f(x) = \dfrac{2x^3 + x}{x^2 - x}$ representarla en el intervalo $\{ x \in R / |x| \leq 2 \}$. Hallar puntos de discontinuidad y asíntotas.

10) Dada la función $f(x) = \dfrac{3x^3 - x}{x^2 + x}$ representarla en el intervalo $\{ x \in R / |2x + 2| \leq 3 \}$ y hallar puntos de discontinuidad y asíntotas.

GUIA DE ESTUDIO VII

1) Calcular las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = \dfrac{\text{sen } x - \cos x}{2}$ en $x_0 = \pi$

c) $f(x) = x^2 + \ln x$ en $x_0 = 3$

d) $f(x) = \sqrt{x} - x^2$ en $x_0 = \dfrac{1}{2}$

2) Calcular la pendiente e inclinación de la recta tangente a las siguientes curvas en el punto cuya abscisa se indica:

a) $f(x) = x^2 + 4x + 6$ en $x_0 = -1$
b) $f(x) = -x^2 + 5x$ en $x_0 = 0$
c) $f(x) = -3x^{-1}$ en $x_0 = 2$

3) Calcular la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{\cos x + \sqrt{x}}{x}$

b) $f(x) = \text{sen } 3x + x^3$

c) $f(x) = \sqrt[3]{x}\ (e^x + 1)^2$

d) $f(x) = 3^{2x} - \ln (x - 1)$

4) Determinar los puntos en que la tangente es horizontal en $f(x) = \cos 2x$.

5) Dadas $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2$ hallar el (los) puntos de la curva en el (los) cuales la inclinación de la recta tangente es 135°.

6) Hallar la ecuación de la recta tangente a cada una de las siguientes curvas en el punto indicado:

a) $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2}$ en $x_0 = -1$

b) $f(x) = x^3$ en $x_0 = 2$

c) $f(x) = + \sqrt{2x}$ en $x_0 = 1$

7) Hallar la ecuación de las rectas tangente y normal de la curva $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x + 1}$ en $x_0 = 0$.

8) Hallar el punto de contacto de la tangente a la curva $f(x) = -2x^2 + 5x$ en $x_0 = 1$ con la recta $f(x) = -x$.

9) Determinar los intervalos en que las siguientes curvas son crecientes o decrecientes:
a) $f(x) = 2^x$
b) $f(x) = -5x^2 + 10$

10) Hallar los puntos de inflexión, máximo y mímimo de las curvas.
a) $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x$
b) $f(x) = x^5 - x^3$

11) Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \text{sen } x & 0 \le x < \pi \\ \cos \frac{x}{2} & \pi \le x < 2\pi \end{cases}$$

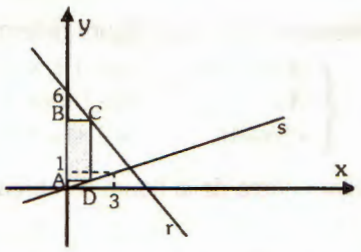
Determinar máximo y mínimo.

12) Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 2}{4x}$, determinar los puntos de discontinuidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión.

13) El producto de 2 números es 18 ¿Cuáles deben ser éstos para que su suma sea mínima?

14) ¿Qué longitud debe tener la altura de un triángulo para que su área sea máxima si la suma de la base y la altura del mismo es 14 cm?

15) Un rectángulo tiene 2 vértices sobre el eje Y, los otros 2 vértices están sobre las rectas r y s de la figura.



¿Para que valores de x será máximo el área del rectángulo?
Determinar las coordenadas de A = (0, y)
B = (0; 6 – 3y)
C = (3y; 6 – 3y)
D = (3y; y)

GUIA DE ESTUDIO VIII

1) Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (x^4 + \sqrt{x})\, dx =$

b) $\int \left(\frac{x - x^3}{x}\right) dx =$

c) $\int (2 \text{ sen } x + 2^x)\, dx =$

d) $\int \frac{\sqrt{x} \cos - 1}{\sqrt{x}}\, dx =$

2) Calcular las siguientes integrales (método de sustitución):

a) $\int \text{sen}\,(3-2x)\,dx =$

b) $\int \frac{3x^2}{2x^3+1}\,dx =$

c) $\int \frac{\text{sen}\,2x}{3+\cos 2x}\,dx =$

d) $\int \frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x}}\,dx =$

3) Calcular las siguientes integrales (Integración por partes):

a) $\int e^x (x^3-1)\,dx =$

b) $\int e^x \,\text{sen}\,x\,dx =$

c) $\int x \cos x\,dx =$

d) $\int \text{sen}\,(\ln x)\,dx =$

4) Calcular el área encerrada por la curva $y = -x^2 + 2$ y la recta $y = 1$.

5) Calcular el área encerrada por la curva $y = x^2 + 2x + 1$, la recta $y = -\frac{1}{2}x + 1$ y el eje de las abscisas.

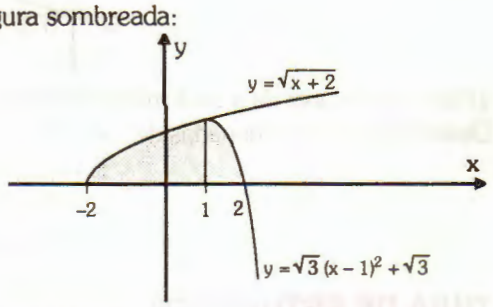
6) Hallar el área encerrada por $f(x) = \frac{-1}{x-2}$ $y = x$ y el eje de ordenadas.

7) Calcular el área encerrada por el eje de las abscisas, $x = \frac{3\pi}{4}$, $x = \frac{5\pi}{4}$ y $(fx) = \text{sen}\,2x$.

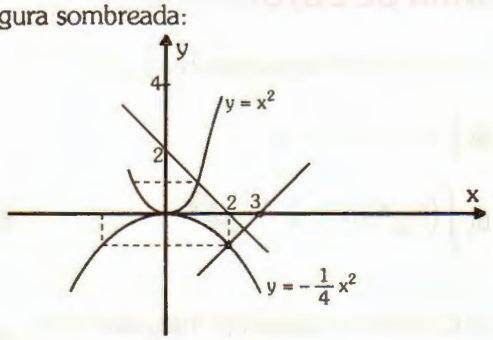
8) Obtener el área de la figura determinada por el gráfico de f(x) y el eje horizontal en [–4,4]

$$f(x) = \begin{cases} x(-x-4) & \text{si } -4 \le x \le -1 \\ 3 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x(-x+4) & \text{si } 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

9) Hallar el área de la figura sombreada:



10)Hallar el área de la figura sombreada:



PARA EVALUAR

Integración I

1) Dadas las siguientes igualdades:
I. cotg 1650° = – tg (– 60°)
II. – cos (– 210°) = sen (– 30°)
III. sen (– 675°) = sen 135°
IV. cosec 90° = sec 720°
Podemos afirmar:

a) Todas son correctas
b) Sólo una es correcta
c) Sólo dos son correctas
d) Sólo tres son correctas
e) Ninguna es correcta

2) La aguja horaria de un reloj recorre K radianes en 36 minutos, entonces K es igual a:

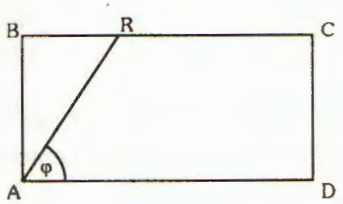
a) $\frac{\pi}{10}$
b) 18
c) $\frac{6\pi}{5}$
d) 72
e) ninguno de los anteriores

3) El radio de un círculo es la cuarta parte de la longitud de un arco del círculo ¿Cuál es la medida, en radianes, del ángulo central que abarca ese arco?

a) 36°
b) 4
c) $\frac{\pi}{4}$
d) 2
e) Ninguna es correcta.

4) En el rectángulo ABCD, $\overline{BR} = \frac{1}{3}\overline{BC}$, $\overline{BC}$ es el doble de $\overline{BA}$, luego cos φ =

a) $3\frac{\sqrt{13}}{13}$
b) $2\frac{\sqrt{13}}{13}$
c) $\frac{2}{3}$
d) $\frac{\sqrt{13}}{13}$
e) Ninguna es correcta.

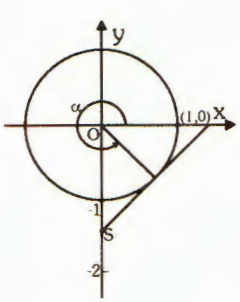


5) La siguiente expresión $\cos^4 20° - \text{sen}^4 20°$ equivale a:

a) 2 cos 20°
b) 1
c) 0
d) sen 40°
e) Ninguna es correcta.

6) En la figura siguiente $\overline{OS} = -\frac{3}{2}$, entonces tg α es:

a) $\frac{-3}{2}$
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{-2\sqrt{5}}{5}$
d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
e) Ninguna es correcta.



7) $(1-i)^{10}$ es igual a:

a) 0 b) 1

c) $1-i$ d) $32\,i$

e) Ninguna es correcta.

8) Dada $f(x) = 1 - \operatorname{sen} 2x$ ¿Para cuántos valores de x $(0 \leq x < 2\pi)$ la gráfica corta al eje x?

a) 3 b) 2

c) 1 d) Ninguno es correcto.

9) ¿ Qué valores de $x/x \leq 2\pi$ satisfacen $\dfrac{1}{\sec^2 x} + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x = 0$

a) Todos los valores de x

b) Sólo 90° y 180°

c) Sólo 180° y 360°

d) Sólo 90°

e) Ningún valor de x

10) El área $\overset{\Delta}{ABC} = 7\sqrt{3}$, el lado $b = 4$ y el lado $c = 7$. El lado a mide a:

a) $2\sqrt{37}$

b) 6

c) $\sqrt{93}$

d) $\sqrt{37}$

e) Ninguna es correcta.

11) Dadas las siguientes funciones:

I $f(x) = \operatorname{sen} x$

II $f(x) = \operatorname{tg} x$

III $f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{9}\right)$

son función par:

a) Sólo I

b)Sólo I y II

c) Sólo II

d) Sólo II y III

e) Ninguna es correcta

12) El $\overset{\Delta}{ABC}$ está inscripto en una circunferencia de radio $\sqrt{3}$. Si el ángulo ACB = 60° entonces el perímetro del triángulo es:

a) $3\sqrt{3}$

b) 9

c) $9\sqrt{3}$

d) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

e) Ninguna es correcta

13) Dadas las siguientes afirmaciones:

I. $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}ß \Rightarrow \alpha = ß$

II. $\operatorname{sen}^2(180° - \alpha) - \cos^2(180° + \alpha) = 1$

III. $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{5}{3}$

IV. $\operatorname{sen}\alpha = \cos ß \Rightarrow \alpha + ß = 90°$

a) Todos son correctos

b) I y IV son correctos

c) II y III son correctos
d) Sólo III es correcta
e) Ninguna es correcta

14) Dadas las siguientes afirmaciones:

I. $\cos \alpha = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \cos 2\alpha = \frac{2}{3}$

II. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{24} \Rightarrow \sec \alpha = 5$

III. $\cos \alpha = -\frac{1}{8} \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$

IV. $\left.\begin{array}{l} \operatorname{tg} \alpha = -\frac{3}{2} \\ \alpha < 180° \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{12}{5}$

a) Todas son correctas
b) I y III son correctas
c) I, II y IV son correctas
d) Sólo I y III son falsas
e) Ninguna es correcta.

15) Dadas las siguientes afirmaciones:

I $\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{23}{9}$

II $\cos(-75°) - \cos 15° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

III Si α y β son suplementarios $\Rightarrow \cos(\alpha + \beta) = 1$

a) Solo I es V
b) Solo I y II son V
c) Sólo I y III son V
d) Ninguna es falsa
e) Ninguna es correcta.

16) Sabiendo que $\operatorname{tg} \alpha = -2$ y α pertenece al segundo cuadrante, la expresión $\frac{\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha + \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{2 \cos \alpha \operatorname{cosec} \alpha}$, equivale a:

a) $\frac{2 - \sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{5} - 2}{5}$

c) $\frac{2 + \sqrt{5}}{5}$

d) Niguna de las opciones dadas.

17) Dadas las siguientes desigualdades:

I. $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} \leq -\operatorname{tg}(-50^G)$

II. $\text{sen}\ \frac{7\pi}{2} > \text{sen}\ 5\pi$

III. $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \geq \text{sen}\ \frac{3\pi}{2}$

a) Todas son V
b) Sólo II y III son F
c) II es F y III es V
d) Sólo I y II son F
e) Ninguna es F.

18) El valor de la expresión $\sqrt{1 + \frac{\cos(-\alpha)}{\text{cosec}\ (270° + \alpha)}} + \cos(90° + \alpha)$ es:

a) $1 - \cos\alpha + \text{sen}\ \alpha$
b) $1 - 2\cos\alpha$
c) 0
d) Ninguna de las opciones dadas.

19) Si $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ y $\alpha < 180°$ entonces el valor de $\sec\alpha + \text{cosec}\ \alpha$ es:

a) $\frac{-5}{12}$
b) $\frac{5}{12}$
c) $\frac{7}{5}$
d)Ninguna es correcta.

20) El valor de la expresión $\frac{\text{sen}\ (180° + \alpha) + \cos(90° + \alpha)}{\text{tg}\ (180° - \alpha)}$ es:

a) $\frac{2}{\cos\alpha}$
b) $\frac{-2}{\sec\alpha}$
c) $\frac{2}{\sec\alpha}$
d) $\frac{-2}{\cos\alpha}$
e) Ninguna es correcta

21) La expresión $\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + \cos\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) - \text{sen}\ (3\pi + x) =$

a) cos x
b) – cos x
c) 2 cos x + sen x
d) 2 sen x + cos x
e) Ninguna de las opciones dadas.

22) Cuál de las siguientes expresiones es una raíz cuarta de 4:
a) $\sqrt{2}$ (cos 72° + i sen 72°)
b) $\sqrt{2}$ (cos 90° + i sen 90°)
c) $\sqrt{2}$ (cos 180° + i sen 180°)
d) Ninguna de las respuestas es correcta

23) En $\overset{\Delta}{ABC}$ si sen $\alpha = \frac{2}{3}$ y sen $\beta = \frac{2}{5}$ entonces sen γ es igual a

a) $\frac{4}{15}$ b) $\frac{16}{15}$

c) $\frac{2}{15}(\sqrt{21} - \sqrt{5})$ d) $\frac{2}{15}(\sqrt{21} - \sqrt{5})$

e) Ninguna es correcta

24) En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, áng B = 30°; áng A = 22° y $\overline{AC} = 5$, la medida de $\overline{BA}$ es:

a) 10 sen 52°

b) $\frac{5}{2}$ sen 52°

c) 10 sen 22°

d) $\frac{5}{2}$ sen 22°

e) Ninguna es correcta.

25) El período de la función

$f(x) = 5 \cos (4x + \frac{2\pi}{45})$ es:

a) 4π b) 8π

c) 5π d) 2π

e) Ninguna es correcta.

26) $[2 (\cos 45° + i \text{ sen } 45°)]^4$ es igual:

a) 16 b) – 16

c) –16i d) 16 i

e) Ninguna es correcta.

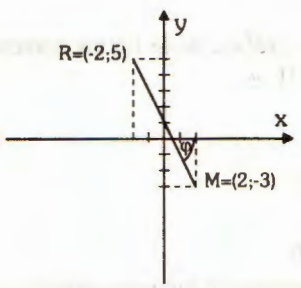
27) En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ tal que la medida de sus lados son 3 números impares y consecutivos y su perímetro es 15, la medida del mayor de sus ángulos es:

a) 90° b) 120°

c) 135° d) 150°

e) Ninguna es correcta.

28) Sen φ es igual a:



a) $\frac{5\sqrt{17}}{17}$ b) $\frac{\sqrt{17}}{17}$

c) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ d) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

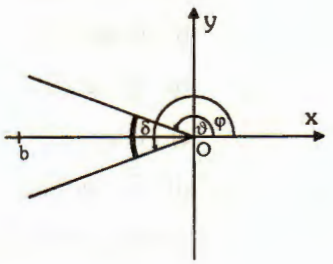
e) Ninguna es correcta.

29) La expresión $\text{sen}^2\,\alpha - \cos^2\alpha = -1$ es:

a) Siempre V.
b) Sólo es V si $\alpha = 0°$
c) Siempre es F.
d) Ninguna de las respuestas es correcta.

30) Si φ y ϑ son los ángulos de la figura y $\overrightarrow{OB}$ bisectriz de δ

I $\cos\varphi = \cos\vartheta$
II $\text{sen}\ \vartheta = -\text{sen}\ \varphi$
III $-\text{tg}\ \vartheta = \dfrac{-1}{\text{cotg}\ (-\varphi)}$

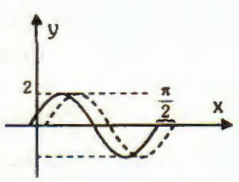


a) Sólo I es V
b) Sólo I y II son V
c) Todos son V
d) Ninguna es V.

31) La expresión $\dfrac{1-\cos 2\ \alpha}{1+\dfrac{1}{\sec 2\ \alpha}}$ es igual a:

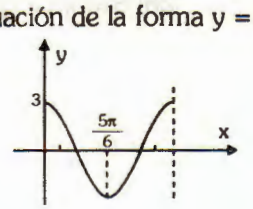
a) 1 b) $\text{tg}^2\,\alpha$
c) -1 d) 0
e) Ninguna de las opciones dadas.

32) La curva de ecuación $y = 2\ \text{sen}\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ es la dibujada con línea llena, la curva dibujada con línea punteada responde a:



a) $y = 2\ \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$
b) $y = 2\ \text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$
c) $y = 2\ \text{sen}\left(\frac{x}{2}-\pi\right)$
d) $y = 2\ \text{sen}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$
e) Ninguna de las opciones dadas.

33) Si la gráfica de la figura corresponde a una ecuación de la forma $y = A\cos(Bx + C)$ el valor de B es:



a) 6
b) 6/5
c) 5
d) 5/6
e) Ninguna de las respuestas es correcta

34) Si $\vec{A} \perp \vec{B}$, $\vec{A} = 2i + 3j$ y $\vec{B} = Ki - j$, entonces K es igual a:
a) 0 b) 1
c) 2/3 c) 3/2
e) Ninguno de los dados

35) Cosec 15° equivale a:

a) $\sqrt{2}\ (\sqrt{3}+1)$

b) $\sqrt{2}\ (\sqrt{3}-1)$

c) $\sqrt{2}\ (-\sqrt{3}-1)$

d) Ninguna de las respuestas anteriores.

36) Si un vector $\vec{a} = a_1\, i + a_2\, j$ es paralelo y de módulo doble del vector $\vec{B} = 2i - j$ entonces:

a) $a_1 = 2\, a_2$

b) $a_1 = -2\, a_2$

c) $a_1 = 2$ y $a_2 = 4$

d) $a_1 = 2$ y $a_2 = -4$

e) Ninguna de las opciones anteriores.

37) La gráfica de $y = tg\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ corta al eje y:

a) Una vez b) Dos veces

c) Nunca d) Ninguna de las respuestas anteriores.

38) Cos (arc sen $\frac{1}{3}$) equivale a:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{\sqrt{8}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{8}}{8}$ d) Ninguna de las respuestas anteriores.

39) En un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$, $c = x + 1$, $b = x - 1$ $a = \sqrt{7}$ y el ángulo $A = 60°$. Entonces x equivale a:

a) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ b) $\frac{7}{2}$

c) 2 d) Ninguna de las respuestas anteriores.

40) Los lados de un triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ son tres números pares consecutivos siendo sólo uno de ellos de dos dígitos, el seno del ángulo comprendido entre el mayor y el menor de los lados es:

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{4}{5}$

c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{5}{4}$

e) Ninguna de las respuestas anteriores.

41) La expresión $\sqrt{2}\,(\cos \frac{25}{36}\pi + i \operatorname{sen} \frac{25}{36}\pi)$ es una raíz sexta de:

a) $4\sqrt{3} + 4i$ b) $4\sqrt{3} - 4i$

c) $-4\sqrt{3} + 4i$ d) Ninguna de las respuestas anteriores.

42) ¿En cuál de los siguientes casos quedan determinados dos triángulos?

I. $b = 8$ $a = 12$ $\beta = 30°$

II. $b = 12$ $a = 5\sqrt{3}$ $\alpha = 60°$

III. $b = 15\sqrt{2}$ $a = 9\sqrt{2}$ $\beta = 40°$

a) Sólo I y III

b) Sólo II y III

c) Sólo I

d) Sólo II

e) Ningún caso.

43) Cuál de los valores siguientes es una solución de sen $3x = \frac{1}{2}$

a) 30°

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) arc sen $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{1}{3}$ arc sen $\frac{1}{2}$

e) Ninguna de las opciones anteriores

44) El conjunto solución de $\cos 2x + \sqrt{1 - \text{sen}^2 x} = -1$ cuando $0 \leq x < 2\pi$ es

a) $\left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

b) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right\}$

d) Ø

e) Ninguna de las repuestas anteriores.

45) Para la función $y = \frac{3}{4}$ sen Kx, ¿cuál es el valor de K para el cuál la función tiene un período de 4π?

a) 4

b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{2}$

d) 2

e) Ninguna de las respuestas anteriores.

46) Sec $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ + cos $\frac{3\pi}{4}$ equivale a:

a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

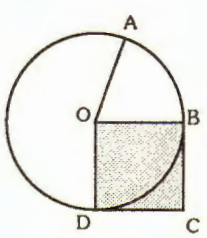
b) $2\sqrt{2}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-2\sqrt{2}$

e) Ninguna de las opciones dadas.

47) La longitud del arco $\widehat{AB} = \frac{4}{3}\pi$ y el área del sector es 2π.
¿Cuál es el perímetro del cuadrado OBCD?



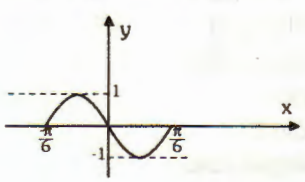
a) 12 cm

b) $\frac{8}{3}$ cm

c) 8 cm

d) Ninguna de las respuestas anteriores

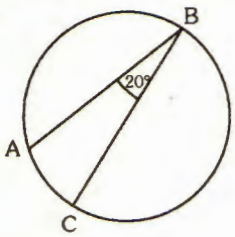
48) ¿Cuál de las siguientes puede ser la ecuación de la sinusoide?



a) $y = \text{sen}\,(3x + \frac{\pi}{6})$ b) $y = \text{sen}\,(x + \frac{\pi}{6})$

c) $y = \text{sen}\,(6x + \pi)$ d) $y = \text{sen}\,(6x - \pi)$

49) En la figura, $\overline{BC}$ es el diámetro de la circunferencia. La medida del ángulo central que abarca el menor de los arcos $\overset{\frown}{AB}$ es:



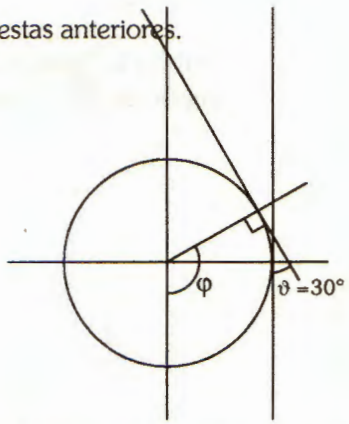
a) $9^h\,20^m$ b) $9^h\,33^m$

c) 9,20 h d)Ninguna de las respuestas anteriores.

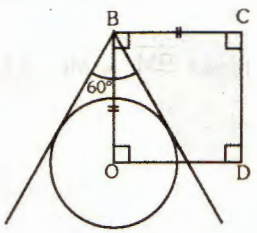
50) Cos φ equivale a:

a) $\frac{-1}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$



51) En la figura, la circunferencia de radio 6 es tangente a los lados de un ángulo ß. Si ß mide 60° el área de la figura sombreada es:



a) $24\,(\sqrt{3} + 6)$ b) $24\,(\sqrt{3} - 6)$

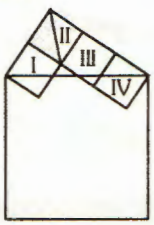
c) $24\,(6 - \sqrt{3})$ d) Ninguna de las opciones anteriores

52) En la figura el área del cuadrado ABCD es 28.561. Si I,II,III y IV son 4 cuadrados congruentes podemos decir que el área de la figura rayada es:

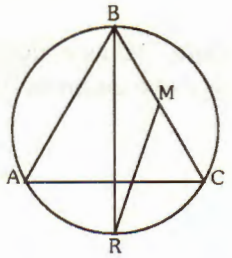
a) 13^2 b) $\frac{13}{2}$

c) $\frac{13^3}{2}$ d) $\frac{13^2}{4}$

e) Ninguna de las respuestas anteriores



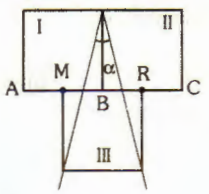
53) Si $\overset{\Delta}{ABC}$ equilátero está inscripto en una circunferencia de radio 2 y M punto medio de $\overline{BC}$, entonces $\overline{RM}$ mide:



a) $\sqrt{7}$ b) $\sqrt{31}$

c) $\sqrt{43}$ d) Ninguna de las opciones anteriores

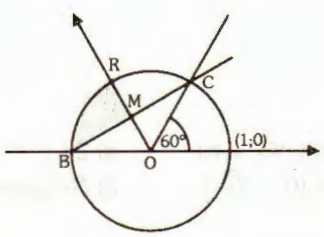
54) En la figura los cuadrados I ,II y III son congruentes. M punto medio de $\overline{AB}$; R punto medio de $\overline{BC}$. El sen α es



a) $\frac{8}{17}$ b) $\frac{\sqrt{17}}{17}$

c) $\frac{4\sqrt{17}}{17}$ d) Ninguna de las opciones anteriores

55) En la figura $\overline{BM} = \overline{MC}$. El área de la región sombreada es:



a) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$

b) $\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d) Ninguna de las opciones anteriores.

56) La ecuación $3^{\text{sen } 2x} = 1$ tiene como solución $(0 \leq x < 2\pi)$

a) {0°}
b) {0°, 90°, 180°}
c) {180°}
d) Ninguna de las opciones anteriores.

57) El valor de $\log\left(\text{tg}\ \frac{5\pi}{4}\right) + \log \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ es

a) 1 b) – 1
c) 0 d) 2
e) Ninguno es correcto.

58) La ecuación 2 sen x = k tiene solución si:
a) K ε Z y K ≤ 4
b) K ε Z y K < 4
c) K ε N y K ≤ 4
d) K ε R
e) K ε N.

59) Las igualdades

I $\cos\left(2\alpha + \frac{9\pi}{2}\right) = -\text{sen}\ \alpha \cos\alpha$

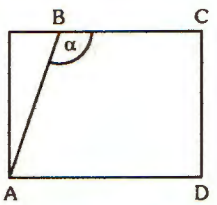
II $\text{tg}\left(2\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{1 - \text{tg}^2\alpha}$

III $\text{sen}\left(2\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = -\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$

a) Son todas correctas
b) Sólo I es F
c) Sólo II es F
d) II y III son F
e) Todos son F.

60) Según los datos de la figura el valor de cos 2 α es:

a) $-\frac{6}{25}$ b) $-\frac{\sqrt{24}}{5}$
c) $-\frac{24}{25}$ d) $-\frac{23}{25}$



$\overline{AB} = \overline{BC} = 5$

$\overline{AD} = \frac{6}{5}\ \overline{BC}$

Integración II

1) Si $\frac{2x-4}{x} \leq 3$ y $x \neq 0$ entonces el conjunto solución es:
a) {x ε R/x ≤ 4}
b) {x ε R/ x ≤ – 4}
c) {x ε R/ x ≥ – 4}
d) {x ε R/x ≥ 4}
e) Ninguna de las opciones dadas

2) |x + 1| ≤ 3 es verdadero para
a) {x ε R/– 3 ≤ x ≤ 3}
b) {x ε R/–3 ≤ x ≤ 2}
c) {x ε R/ x ≤ 2}
d) {x ε R/ x ≥ 2}
e) {x ε R/– 4 ≤ x ≤ 2}

3) El dominio de f(x) =log (2x–3) es:

a) R

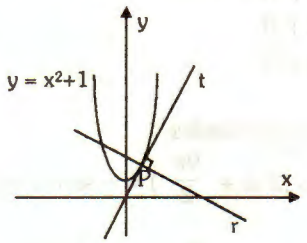
b) R – {0}

c) R^+

d) $\{x \in R / x > \frac{3}{2}\}$

e) $\{x \in R / x \geq \frac{3}{2}\}$

4) La recta t es tangente a la parábola en P, entonces la ecuación de la recta r perpendicular a t en P es:



a) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

b) $y = -2x + 2$

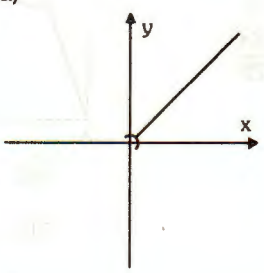
c) $y = \frac{1}{2}x + 2$

d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

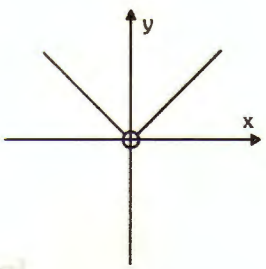
e) Ninguna es correcta

5) El gráfico de la función $f(x) = \frac{|x|}{x^2}$ si $x \neq 0$ es:

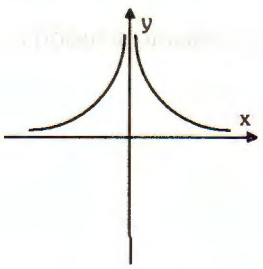
a)



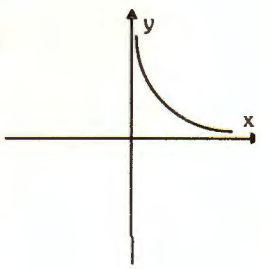
b)



c)



d)



e) Ninguna de las respuestas anteriores

6) ¿Cuál de las siguientes es función par?

I $f(x) = x^3$

II $f(x) = 2x^4$

III $f(x) = \cos x$

a) Sólo I
b) Sólo II
c) Sólo III
d) II y III
e) Ninguna de las respuestas anteriores

7) Si x e y son números reales e $y = -\sqrt{2 - x^2}$, ¿cuál es el mínimo valor de y ?

a) $\sqrt{2}$
b) 0
c) $-\sqrt{2}$
d) -2
e) Ninguna de las respuestas anteriores

8) El $\lim_{x \to K} \frac{3x^2 - 4Kx + K^2}{x^2 - K^2}$ equivale a:

a) 1
b) 0
c) indeterminado
d) K
e) 3

9) El $\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 + 4}{3x^2 + 1}$ es igual a:

a) 0
b) indeterminado
c) ∞
d) $\frac{2}{3}$
e) 4

10) Si $f(x) = \frac{x - 9}{x^2 - 81}$ para que valor o valores de x el gráfico de f(x) tiene una asíntota vertical.

a) 9 y −9
b) 0
c) −9
d) 9
e) 9, 0 y −9

11) La función f(x) = sen 2x en $(0; 2\pi)$, tiene:

a) Máx. en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ e inflex. en $x_2 = \frac{\pi}{2}$ y $x_3 = \frac{3\pi}{2}$

b) Máx. en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ e inflex. en $x_1 = \frac{\pi}{2}$ y $x_3 = \frac{3\pi}{2}$

c) Mín. en $x_0 = \frac{\pi}{4}$ y $x_1 = \frac{5\pi}{4}$ e inflex. en $x_1 = \frac{\pi}{2}$

d) Ninguna de las opciones dadas.

12) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ K & \text{si } x = 1 \end{cases}$

¿Cuál deberá ser el valor de K para que f(x) sea una función continua?

a) 1
b) – 1
c) 0
d) 2
e) Ningún valor de K puede hacer a f(x) continua.

13) Si $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2x + 2} & \text{si } x \neq -1 \\ K & \text{si } x = -1 \end{cases}$

el valor de K para que f(x) sea una función continua es:

a) –1
b) 0
c) 3
d) Ningún valor de K puede hacer a f(x) continua.

14) Si f (x) = E (x) + |x| el valor de f (1,3) – f (–2,3) es:

a) 2
b) 2,6
c) 1,6
d) 3
e) Ninguna de las opciones dadas.

15) Si $f(x) = \frac{1}{3}\ x^2 - 1$, entonces f (x) tiene un valor mínimo cuando x alcanza el valor:

a) – 3
b) 3
c) 0
d) $\sqrt{3}$
e) $-\sqrt{3}$

16) ¿Cuál de las siguientes expresiones es una asíntota de $y = \dfrac{-2x^2 + 3x - 1}{1 - 4\,x^2}$?

a) $x = \frac{1}{2}$
b) $y = -1$
c) $x = -\frac{1}{2}$
d) $y = -\frac{1}{2}$
e) $x = 1$

17) La ecuación de la recta tangente a $y = +\sqrt{x+3}$ en el punto x = 6 es:

a) y −3 = 6 (x−6)
b) y −6 = 3 (x−6)
c) $y - 6 = \frac{1}{6}(x-6)$
d) $y - 3 = \frac{1}{6}(x-6)$

18) El área limitada por el eje Y, la curva $y = \frac{1}{4}x^2 + x + 1$, la recta $y = -2x + 8$ y el eje X es:

a) $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx - \int_2^4 (-2x + 8)dx$

b) $\int_0^2 (-2x + 8)dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx$

c) $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx + \int_0^2 (-2x + 8)dx$

d) $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 + x + 1\right)dx + \int_2^4 (-2x + 8)dx$

19) La función $y = \frac{2}{x^2 + 4}$ tiene una asíntota vertical en:

a) x = 2
b) x = −2
c) x = 2 y x = −2
d) x = 0
e) No tiene asíntota vertical.

20) La función $y = 2x^3 + x^4$

a) Es decrec. en $(-\infty, \frac{3}{2})$
b) Es decrec. en $(0, +\infty)$
c) Es decrec. en $(-\infty, 0)$
d) Es decrec. en $(-\frac{3}{2}, 0)$
e) Es decrec. en $(-\infty, -\frac{3}{2})$

21) La recta y = −6x + 6 es tangente a la curva $y = -x^2 - 4x + 5$ en

a) (0; 6)
b) (− 5; 0)
c) (− 1; 8)
d) (1; 0)
e) Ninguno de los puntos dados.

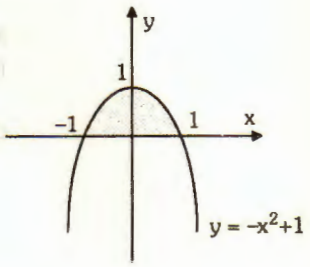
22) El área de la figura rayada equivale a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{4}{3}$

c) $\frac{2}{3}$

d) 2

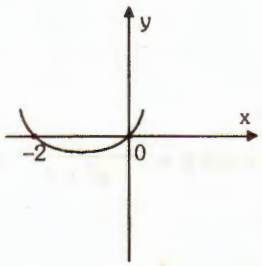


e) Ninguna de las respuestas anteriores.

23) Si A_1 es el área encerrada por las curvas $y = -2x^2 + 3$ e $y = 2x - 1$ y A_2 es el área encerrada por $y = -x^2 + 3$ e $y = -2x + 1$ entonces:

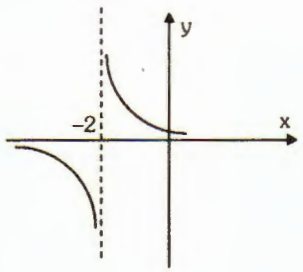
a) $A_1 = A_2$
b) $A_1 > A_2$
c) $A_1 < A_2$

24) Si la gráfica de la fig. representa una función f(x)

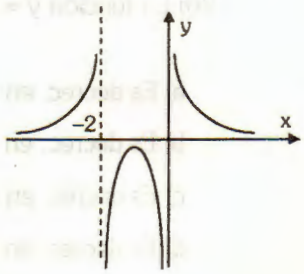


¿Cuál de las siguientes podría representar $y = \frac{1}{f(x)}$

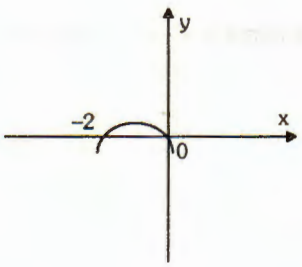
a)



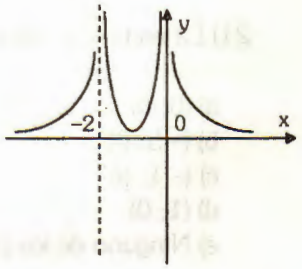
b)



c)

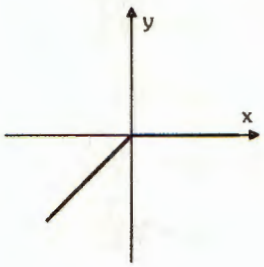


d)

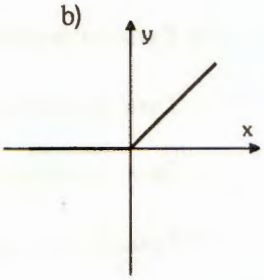


25) Un gráfico aproximado de la función representada por $f(x) = x - |x|$ es:

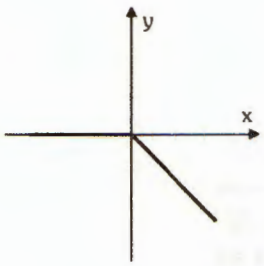
a)



b)



c)



d) Ninguno de los anteriores.

26) Dada $f(x) = \frac{5}{x^2 - K}$ podemos afirmar que f(x) es continua en todos sus puntos si:

a) $K \neq 0$
b) $K \neq -1$
c) $K \neq 1$
d) $K \varepsilon R^-$
e) Ninguna de las opciones anteriores.

27) Indicar cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son V:

I $|x| \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 3$
II $|x-1| = x-1 \quad \forall x \varepsilon Z^+$
III $|x| + 3 = x+3$

a) Sólo I es F
b) Solamente I y II son F
c) II es V
d) II y III son V
e) Ninguna de las respuestas anteriores.

28) La función $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x$ tiene

a) Un máximo en $x_0 = 1$
b) Un mínimo en $x_0 = -1$
c) Un punto de inflexión en $x_0 = 1$
d) Un máximo en $x_0 = -1$
e) Ninguna de las opciones anteriores.

29) Si $f(x) = x^2 + mx$ tiene un mínimo en $x = 3$ entonces m vale:

a) 3
b) -3
c) 6
d) -6
e) Ninguna de las opciones dadas.

30) La función $f(x) = x^4 + x$:

a) Tiene un punto de inflexión en $x_0 = -\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

b) Tiene un punto de inflexión en $x_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) Tiene un punto de inflexión en $x_0 = -\sqrt{\frac{1}{12}}$

d) Tiene un punto de inflexión en $x_0 = \sqrt{\frac{1}{12}}$

e) No tiene puntos de inflexión.

31) La función $f(x) = \frac{-1}{3-x}$ tiene:

a) Concavidad positiva en $(-\infty, 3)$
Concavidad negativa en $(3, +\infty)$

b) Concavidad positiva en $(-\infty, 3)$
Concavidad negativa en $(3, +\infty)$

c) Concavidad negativa en $(-\infty, 3)$
Concavidad positiva en $(3, +\infty)$

d) Concavidad negativa en $(-\infty, 3)$
Concavidad positiva en $(3, +\infty)$

32) La diferencia entre el valor mínimo y máximo de la función $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}$ es:

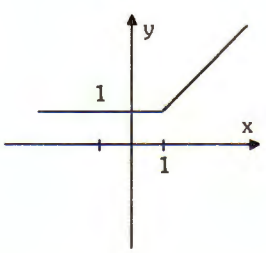
a) 1

b) $\frac{\sqrt{37}}{6}$

c) $\frac{7}{6}$

d) Ninguna de las opciones dadas.

33) La figura



es la representación gráfica de:

a) $f(x) = |x + 1| - x$

b) $f(x) = |x - 1| + x$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ x & x > 1 \end{cases}$

d) $f(x) = |x + 1| + x$

e) Ninguna de las opciones dadas.

34) ¿Cuál de las siguientes funciones es impar?

a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

b) $f(x) = x^3 - 1$

c) $f(x) = \frac{1}{x}$

d) Ninguna de las opciones dadas.

35) Dada la función $f(x) = x^4 - 4x^3 + 16$ ¿cuál de las siguientes afirmaciones es V?

a) Tiene máx en $x_0 = 3$, Inf en $x_1 = 0$

b) Tiene mín en $x_0 = 3$, Inf en $x_1 = 2$

c) Tiene máx en $x_0 = 3$, Inf en $x_1 = 0$ e inf. en $x_2 = 2$
d) Tiene mín en $x_0 = 3$, Inf. en $x_1 = 0$ e inf. en $x_2 = 2$

36) El valor máx. de $\frac{\text{sen } x \cos x}{3}$ es:

a) $\frac{1}{6}$ b) $\frac{1}{3}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) 3

e) 6

37) $\int \cos^2 x \, dx$ equivale a:

a) $\frac{1}{2}(x + \text{sen } x \cos x) + C$ b) $\frac{1}{2}(x - \text{sen } x \cos x) + C$

c) $\frac{1}{2}(\text{sen } x \cos x - x) + C$ d) Ninguna de las opciones dadas.

38) La inclinación (aproximada con grados y minutos) de la recta tangente a la curva $y = 3x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 1$ es:

a) 80° 32' b) 19° 28'
c) 99° 28' d) Ninguna de las opciones dadas.

39) Dada la curva $f(x) = x^3 + x$ la (s) recta (s) tangente a la misma son paralelas a $y = 4x - 1$ en los puntos de abscisa:

a) 0 b) 1
c) 0 y 1 d) −1
e) 1 y −1

40) La diagonal mínima de todos los rectángulos de perímetro igual a 20 es:

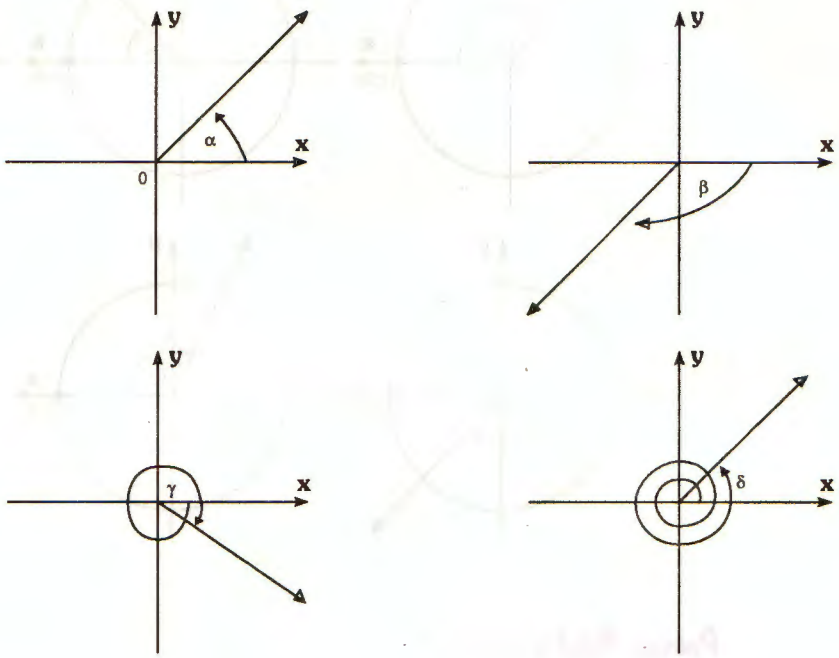
a) $2\sqrt{5}$ b) $5\sqrt{2}$
c) $\sqrt{5}$ d) Ninguna de las opciones dadas.

GUIA DE ESTUDIO I

Para Aplicar (A)

(a) positivo; negativo; negativo.

(b)



Para Aplicar (B)

(a) F; F*; V; V; F; V

* Recordar: $1° \ldots\ldots 60'$ $\qquad x = \frac{8{,}3° \cdot 60'}{1°}$

$8{,}3° \ldots\ldots x$

(b) 600' ; 3600 ava parte ; 5400', 55200"

Para Aplicar (C)

(a) 52.700^{M}; 780.900^{S}; $20{,}04^{G}$, 90.000^{S}

(b) 20.000^{M}; $4.000.000^{S}$; 50^{G}; al 4to cuadrante y mide - $57{,}48^{G}$

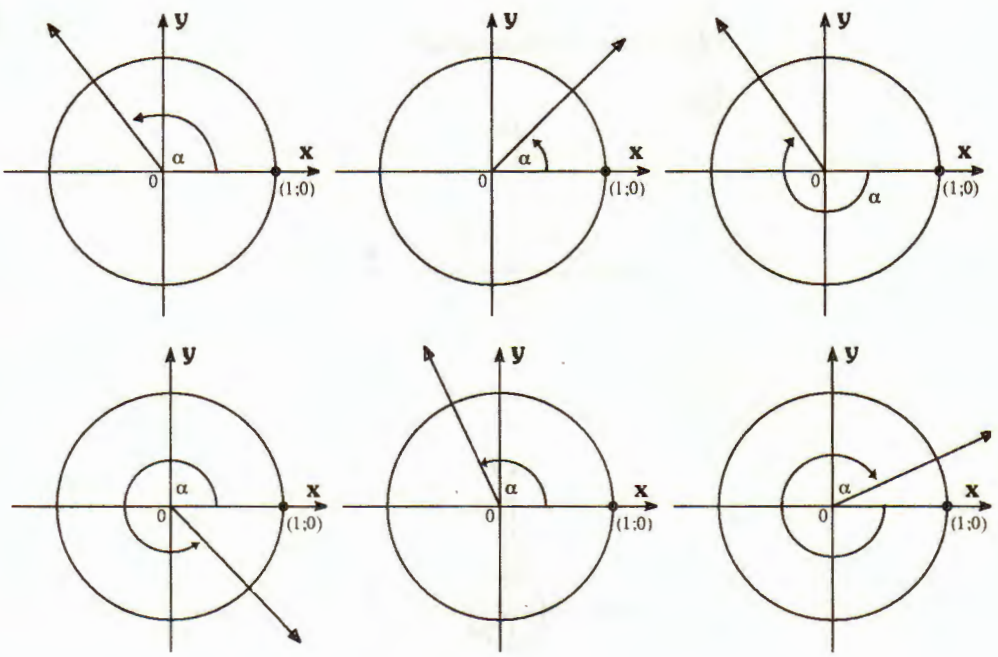
Para Aplicar (D)

(a) 1 radián $\cong 57° 17' 44"$.

(b) $b_1)\ \frac{\pi(r)}{2};\ \frac{3\pi(r)}{4};\ \frac{5\pi(r)}{4}$

$b_2)\ -\frac{5\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{4}$

(c)



Para Aplicar (E)

(a) F; F; V; F; F.

(b) 2160^{m}; 2° cuadrante.

(c) $15^{h}\ 0^{m}\ 0^{s};\ -9^{h}\ 0^{m}\ 0^{s}$

PARA EJERCITAR

1)

	sexagesimal	centesimal	circular	horario
α_1	36°	40^{G}	$\frac{\pi}{5}$	$2^{h}\ 24^{m}$
α_2	108°	120^{G}	$\frac{3\pi}{5}$	$7^{h}\ 12^{m}$
α_3	135°	150^{G}	$\frac{3\pi}{4}$	9^{h}
α_4	225°	250^{G}	$\frac{5\pi}{4}$	15^{h}
α_5	157° 30'	175^{G}	$\frac{7\pi}{8}$	$10^{h}\ 30^{m}$
α_6	810°	900^{G}	$\frac{9\pi}{2}$	54^{h}

2) a) $\alpha < \beta < \gamma$

b) $\beta < \gamma < \alpha$

3) a) $x = 3{,}8214$

b) $x = 65° 4' 24''$

c) $x = 72^G\ 15^M\ 56^S$

d) $x = 2$

e) $x = (a - b)^2$

4) $133^G\ 33^M\ 33^S$

5) $\frac{3\pi}{2}$

6) 4320'

7) 130° debe valer 150°; 60° debe valer 30°; $\frac{2\pi}{3}$ debe valer 135°

8) $\alpha = 60°$; $\gamma = 42°$; $\beta = 78°$

9) $\alpha = 92°10'$; $\beta = 47°10'$

10) 3769,92 m.

11) 5890,5 arcos

12) a) $266^G\ 66^M\ 66^S$

b) 18,8496 cm. y 84,8232 cm^2.

13) $1^h\ 22^m$

14) 3850,4555. km

15) 6092,5398. km

16) Área = 12,1176

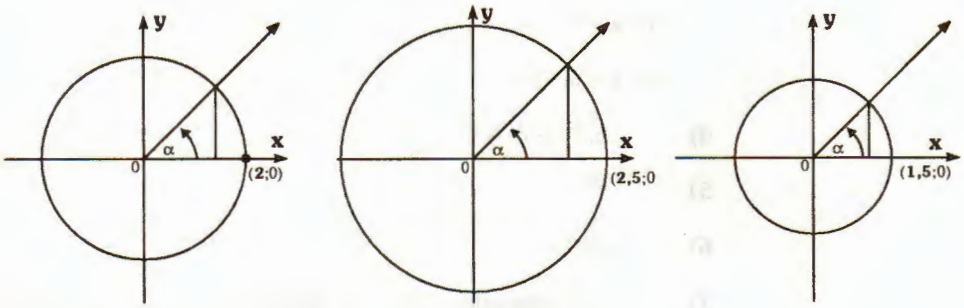
Perímetro = 8,0784

17) $\alpha = 63°$ $\beta = 76° 30'$ $\gamma = 40° 30'$

GUIA DE ESTUDIO II

Para Aplicar (A)

ⓐ



sen 50° = 0,76
cos 50° = 0,64

sen 50° = 0,76
cos 50° = 0,64

sen 50° = 0,76
cos 50° = 0,64

ⓑ

$\text{sen } \alpha = \frac{4}{5}$	$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$	$\text{sen } \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$	$\text{sen } \alpha = \frac{2}{3}$	$\text{sen } \alpha = 0{,}6$
$\cos \alpha = \frac{3}{5}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos \alpha = \frac{3}{4}$	$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$	$\cos \alpha = 0{,}8$
		$Q = (3;\sqrt{7})$	$R = (\sqrt{5};\ 2)$	

Si r = 1, entonces cos α = **abscisa de P**

ⓒ

si $\alpha \in$ 2° cuadrante		si $\alpha \in$ 3°cuadrante $180° \leq \alpha \leq 270°$		si $\alpha \in$ 4° cuadrante $270° \leq \alpha \leq 360$	
sen	+	sen	−	sen	−
cos	−	cos	−	cos	+

ⓓ $\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2 + x^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$

Para Aplicar (B)

ⓐ $\text{tg } (90° + \alpha) = -\text{cotg } \alpha$ $\qquad$ $\sec (90° + \alpha) = -\text{cosec } \alpha$

$\text{cosec } (90° + \alpha) = \sec \alpha$ $\qquad$ $\text{cotg } (90° + \alpha) = -\text{tg } \alpha$

Si dos ángulos difieren en $\frac{\pi}{2}$ **las funciones del mayor son iguales en valor absoluto a las co-funciones del menor, excepto seno y cosecante que conservan el signo.**

ⓑ

$\text{sen}(90° - \alpha) + \cos\alpha$	$= 2\cos\alpha$	V
$\cos\alpha + \cos\alpha$	$= 2\cos\alpha$	
$\text{sen}(90° - \alpha) + \cos\alpha$	$= 2\cos\alpha$	V
$\cos\alpha + \cos\alpha$	$= 2\cos\alpha$	
$\text{tg}(90° - \alpha) - \text{tg}(90° + \alpha) = 0$		F
$\text{cotg}\,\alpha - (-\text{cotg}\,\alpha)$	$= 2\,\text{cotg}\,\alpha$	

$\text{sen}\,30° = \cos 60°$ V — por ser complementarios.

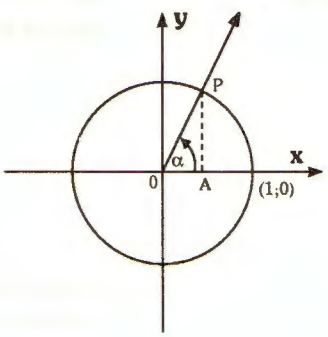
$\text{tg}\,50° = -\,\text{cotg}\,40°$ F — son complementarios, conservan el signo positivo.

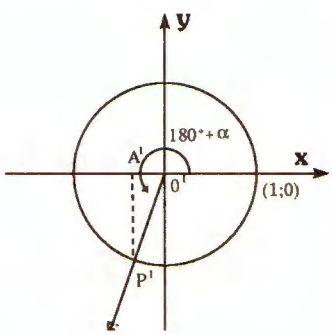
$\cos 120° = \text{sen}\,30°$ F — 120° pertenece al 2º C y coseno es negativo.

Para Aplicar ©

ⓐ $\beta - \alpha = 180°$ entonces $\beta = 180° + \alpha$

Si α es un ángulo del 1er cuadrante entonces **$180° + \alpha$ pertenece al 3er cuadrante.**





$\widehat{OAP}$ y $\widehat{O'A'P'}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1R \\ \alpha = A'O'P' \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$ resulta $\widehat{OAP} \equiv \widehat{O'A'P'}$

luego $\overline{A'P'} = \overline{AP}$ ordenada de P' = - ordenada de P.

$\Rightarrow$ **$\text{sen}(180° + \alpha) = -\,\text{sen}\,\alpha$**

$\overline{O'A'} = \overline{OA}$ abscisa de P' = - abscisa de P.

$\Rightarrow$ **$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$**

ⓑ

$\text{tg}(180° - \alpha) = -\,\text{tg}\,\alpha$	$\text{tg}(180° + \alpha) = \text{tg}\,\alpha$
$\text{cosec}(180° - \alpha) = \text{cosec}\,\alpha$	$\text{cosec}(180° + \alpha) = -\,\text{cosec}\,\alpha$

$\sec(180° - \alpha) = -\sec\alpha$ $\qquad$ $\sec(180° + \alpha) = -\sec\alpha$

$\operatorname{cotg}(180° - \alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(180° + \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha$

ⓒ CONCLUSIÓN 1: Si dos ángulos son suplementarios **sus funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, excepto el seno y la cosecante que conservan el signo.**

CONCLUSIÓN 2: Si dos ángulos difieren en 180° sus **funciones trigonométricas tienen igual valor absoluto pero distinto signo, excepto la tangente y la cotangente que conservan el signo.**

ⓓ

V	por ser 150° y 30 ° suplementarios.	
F	cos 150° = – cos 30°	150° y 60°no son suplementarios.
F	sec 210° = – sec 30°	210° y 30° difieren en 180°, no cambian las funciones.
F	tg 130° = – tg 50°	130° pertenece al 2°C y tg es negativa.
V	porque 240° y 60° difieren en 180° el seno cambia de signo.	
F	cotg 225° = cotg 45°	225° y 45° difieren en 180° pero la cotg conserva signos.

Para Aplicar Ⓓ

ⓐ

$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\operatorname{cosec}\alpha$

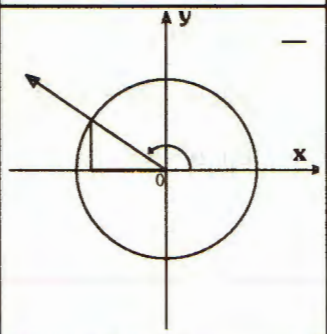
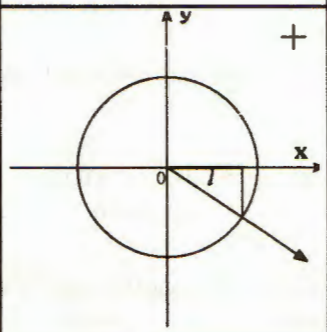
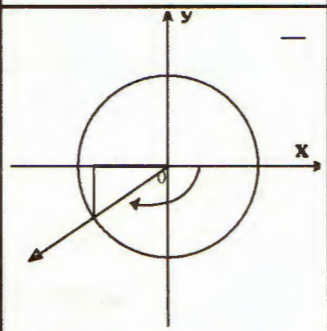
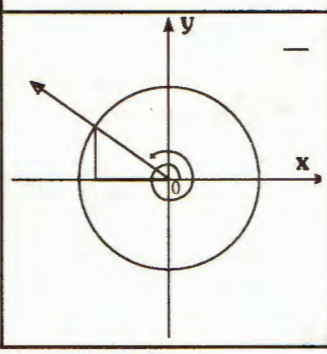
$\sec(-\alpha) = \sec\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{cotg}(-\alpha) = -\operatorname{cotg}\alpha$

ⓑ

V	por ser (-30°) y 30° ángulos opuestos.	
F	sec 60° = sec (-60°),	la función secante conserva el signo.
V	– cos 45° = – cos 45°	por ser (-45°) y 45° ángulos opuestos.
F	tg 60° – tg 60°= 0	
V	$\cos^2 30° + \operatorname{sen}^2 30° = 1$	(relación pitagórica)
V	– sen 45° + sen 45° = 0	

Para Aplicar (E)

(a)

β	Signo de cos β	Relacionar con	Valor de cos β	
150°		ángulo suplementario 150° = 180° - α **α = 30°**	- cos 30°	cos 150° = - cos 30°
-45°		ángulo opuesto - 45° + α = 0 **α = 45°**	cos 45°	cos (-45°)° = cos 45°
-120°		ángulo suplementario - 120° = - (180° - α) - 120° = - 180° + α **α = 60°**	- cos 60°	cos (-120°) = - cos 60°
495°		495° = 360° + 135° 135° = 180° - α **α = 45°**	- cos 45°	cos 495° = - cos 45°

(b)

$b_1)$ 4 $\quad b_2)$ $\sqrt{2} - 1$ $\quad b_3)$ $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$b_4)$ -2 $\quad b_5)$ $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\quad b_6)$ 0

$b_7)$ $\frac{-5\sqrt{3}}{6}$

Para Aplicar (F)

(a) $a_1)\ \operatorname{sen}\alpha = 0$ $\qquad a_2)\ \cos\alpha = 0$

$a_3)\ \cos\alpha = 0$ $\qquad a_4)\ \operatorname{sen}\alpha = 0$

(b) $b_1)\ \alpha = K\pi$ $\qquad b_2)\ \alpha = (2K+1)\cdot\frac{\pi}{2}$

$b_3)\ \alpha = (2K+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ $\qquad b_4)\ \alpha = K\pi$

PARA EJERCITAR

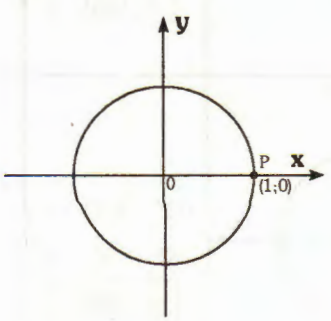
1) $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ $\qquad \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$;

$\sec\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{1-\operatorname{sen}^2\alpha}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}\alpha}$

2) $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + 1 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$;

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}{\operatorname{tg}\alpha}$; $\sec\alpha = \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

3) a) $\alpha = 0°$

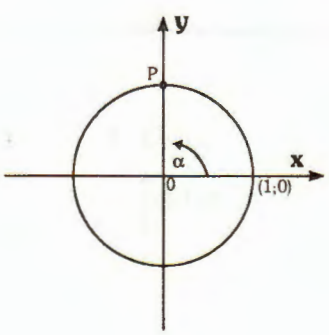


$\operatorname{sen} 0° = 0$ $\qquad \operatorname{cosec} 0° = \frac{1}{\operatorname{sen} 0°} : \nexists$

$\cos 0° = 1$ $\qquad \sec 0° = \frac{1}{\cos 0°} = 1$

$\operatorname{tg} 0° = \frac{\operatorname{sen} 0°}{\cos 0°} = 0$ $\qquad \operatorname{cotg} 0° = \frac{\cos 0°}{\operatorname{sen} 0°} : \nexists$

b) $\alpha = 90°$



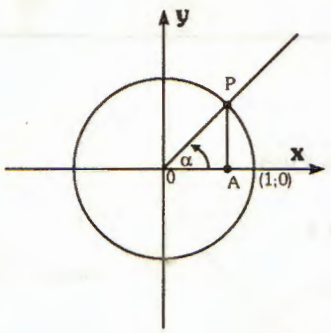
$\operatorname{sen} 90° = 1$ $\qquad \operatorname{cosec} 90° = 1$

$\cos 90° = 0$ $\qquad \sec 90° \nexists$

$\operatorname{tg} 90°: \nexists$ $\qquad \operatorname{cotg} 90° = 0$

c) $\alpha = 45°$

$\hat{OAP}$ es isósceles porque tiene 2 ángulos de 45° entonces tiene 2 lados iguales.



$\overline{OA}^2 + \overline{AP}^2 = r^2$

$2\overline{OA}^2 = r^2$

$\overline{OA} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

$r = 1 \Rightarrow \overline{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \text{cosec } 45° = \sqrt{2}$ $\quad \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sec 45° = \sqrt{2}$ $\quad \text{tg } 45° = 1$ $\quad \text{cotg } 45° = 1$

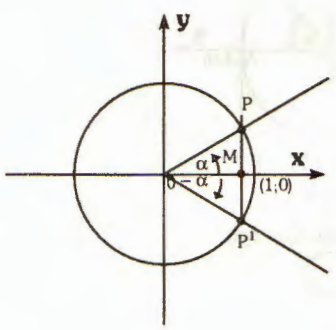
d) $\alpha = 30°$

$\hat{OPP'}$ es triángulo equiángulo $\Rightarrow$ es equilátero

$\overline{OM}$ es mediana y altura o sea $\overline{PM} = \overline{MP'}$

$\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{PM}^2$ como $\overline{PM} = \frac{1}{2}\overline{PP'} = \frac{1}{2}\overline{OP} \Rightarrow \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 + \frac{1}{4}\overline{OP}^2$

$\frac{3}{4}\overline{OP}^2 = \overline{OM}^2 \Rightarrow \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}r}{2}$ si $r = 1 \Rightarrow \overline{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

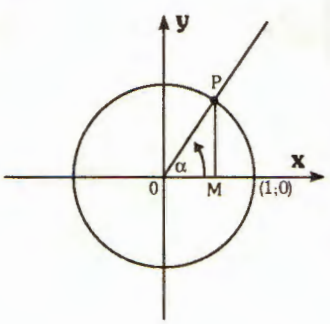


$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\quad \text{cosec } 30° = 2$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sec 30° = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\quad \text{cotg } 30° = \sqrt{3}$

e) $\alpha = 60°$ $\quad \hat{OMP}$, $\hat{POM} = 60°$



$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \text{cosec } 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

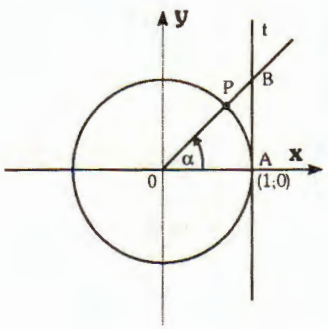
$\cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad \sec 60° = 2$

$\text{tg } 60° = \sqrt{3}$ $\quad \text{cotg } 60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4)

	0°	30°	45°	60°	90°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

5) En $\hat{OAB}$

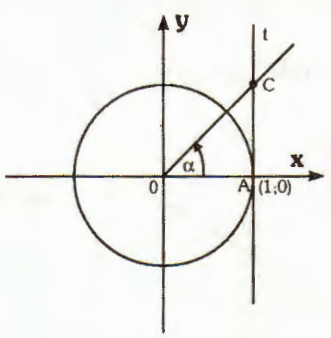


$\text{sen } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}$ y $\cos \alpha = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}$ como

$\text{tg } \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}}}{\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}} \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}$

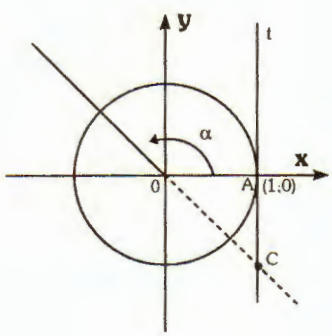
tg α = $\overline{AB}$ = ordenada de B

6)



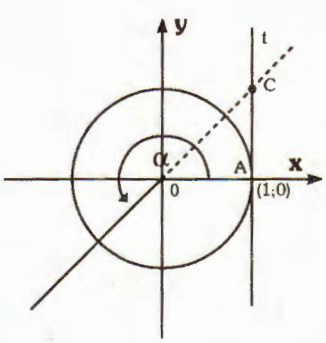
ordenada de C = tgα

(+)



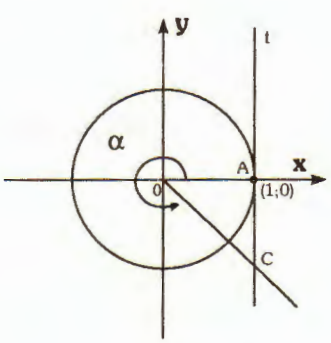
ordenada de C

(−)



ordenada de C

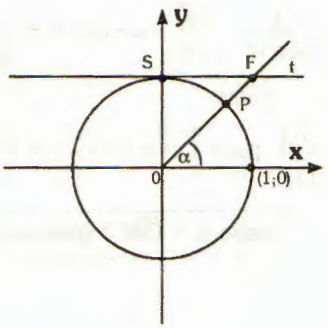
(+)



ordenada de C

(−)

7) En $\hat{OSF}$, $\widehat{SFP}$ = α por alternos internos entre t // eje X y transversal $\overline{PF}$.

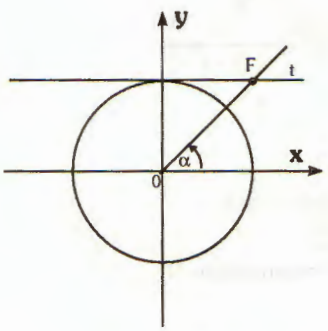


$\text{sen } \alpha = \dfrac{\overline{OS}}{\overline{OF}}$ y $\cos \alpha = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{OF}}$

$\text{cotg } \alpha = \dfrac{\cos \alpha}{\text{sen } \alpha} = \dfrac{\dfrac{\overline{FS}}{\overline{OF}}}{\dfrac{\overline{OS}}{\overline{OF}}} = \dfrac{\overline{FS}}{\overline{OS}}$ y como $\overline{OS} = r = 1$

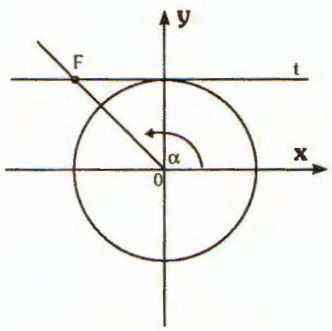
cotg $\alpha = \overline{FS}$ = abscisa de F

8)



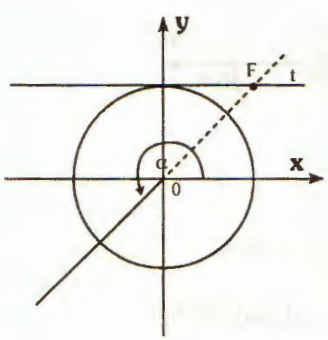
cotg α = abscisa de F

(+)



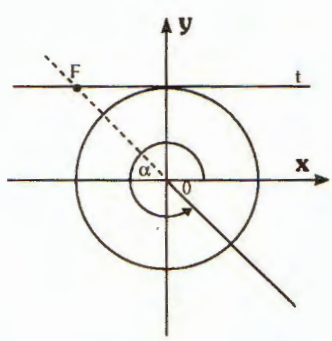
cotg α = abscisa de F

(-)



cotg α = abscisa de F

(+)

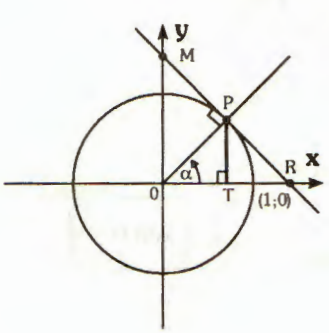


cotg α = abscisa de F

(-)

9) Consideramos el $\overset{\triangle}{OTP}$

a) En $\overset{\triangle}{OTP}$ $\sec \alpha = \dfrac{1}{\cos \alpha} = \dfrac{1}{\dfrac{\overline{OT}}{\overline{OP}}} \Rightarrow \sec \alpha = \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OT}}$ 1)



pero $\overset{\triangle}{OTP} \sim \overset{\triangle}{OPR}$

$\therefore \dfrac{\overline{OP}}{\overline{OT}} = \dfrac{\overline{OR}}{\overline{OP}}$ pero $\overline{OP} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{OT}} = \dfrac{\overline{OR}}{1}$ por 1)

sec α $\overline{OR}$ = abscisa de R.

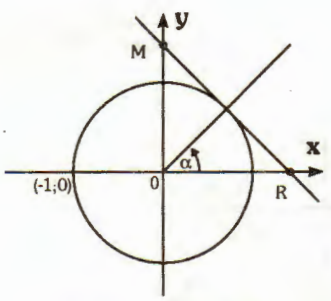
b) En $\overset{\triangle}{OTP}$ $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\frac{PT}{}} \Rightarrow \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{PT}$ 2)

pero $\overset{\triangle}{OTP} \sim \overset{\triangle}{OPM}$

$\therefore \dfrac{\overline{OP}}{\overline{PT}} = \dfrac{\overline{OM}}{\overline{OP}}$ pero $\overline{OP} = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\overline{PT}} = \overline{OM}$ por 2)

cosec α = $\overline{OM}$ = ordenada de M

10)

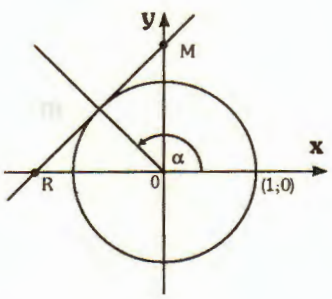


sec α = abscisa de R

(+)

cosec α = ordenada de M

(+)

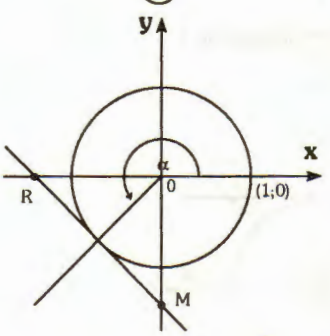


sec α = abscisa de R

(−)

cosec α = ordenada de M

(+)

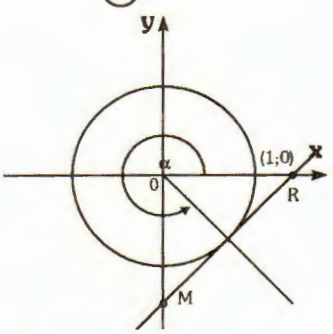


sec α = abscisa de R

(−)

cosec α = ordenada de M

(−)



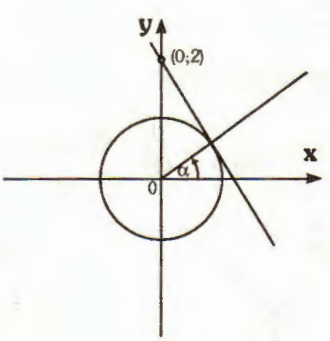
sec α = abscisa de R

(+)

cosec α = ordenada de M

(−)

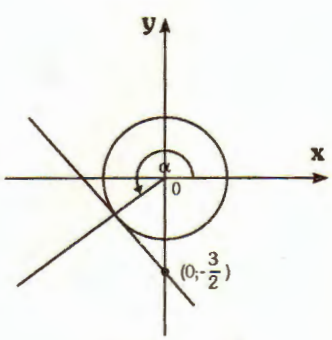
11) a)



cosec $\alpha = 2$

$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha} \Rightarrow$ **sen $\alpha = \frac{1}{2}$**

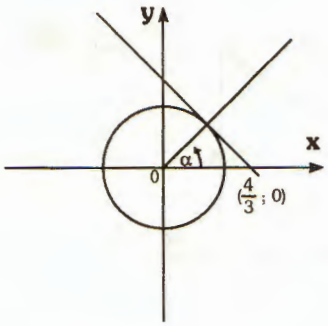
b)



$\operatorname{cosec}\alpha = -\dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{-2}{3}$

c)



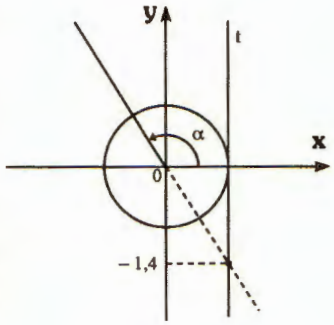
$\sec \alpha = \frac{4}{3}$

$\frac{1}{\cos \alpha} = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{4}$

$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$

$\Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{16}} \Rightarrow \boxed{\textbf{sen}\ \alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}}$

d)



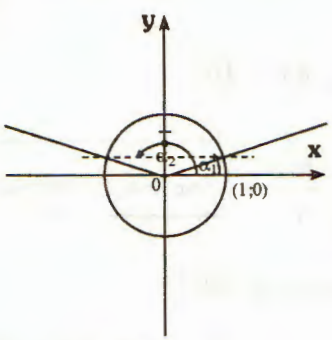
$\operatorname{tg} \alpha = -1{,}4$

$\cos^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$ pero como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$

$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1$

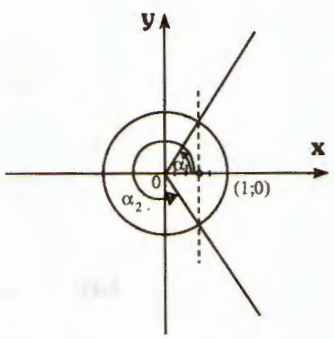
$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{1{,}96} + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\textbf{sen}\ \alpha = 0{,}81}$

12) a) $\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{3}$



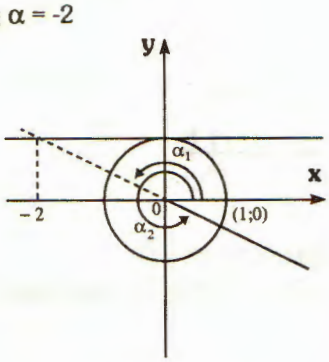
$\operatorname{sen} \alpha_1 = \operatorname{sen} \alpha_2$

b) $\cos \alpha = \frac{3}{5}$



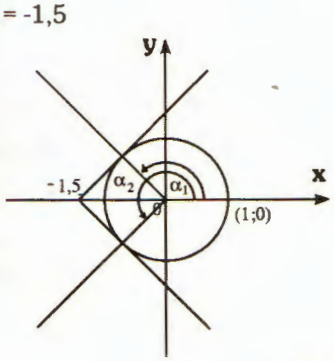
$\cos \alpha_1 = \cos \alpha_2$

c) $\operatorname{cotg} \alpha = -2$



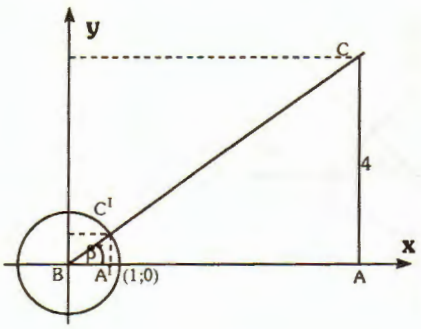
$\operatorname{cotg} \alpha_1 = \operatorname{cotg} \alpha_2$

d) $\sec \alpha = -1{,}5$



$\sec \alpha_1 = \sec \alpha_2$

13) Se grafica β y se construye el $\hat{BAC}$



$$\text{Sup } \hat{BAC} = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{AC}}{2}$$

Cálculo de $\overline{BA}$

$\hat{BAC}$ y $\hat{BA'C'}$ $\begin{cases} CAB = C'A'B' = 1R \\ B = B \text{ por prop. reflexiva} \end{cases}$ $\hat{BAC} \sim \hat{BA'C'}$

Por lo tanto $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BC'}}$

$\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$ o sea $\dfrac{\overline{BA}}{\overline{BA'}} = \dfrac{4}{\frac{3}{5}}$ pero $\overline{BA'} = \cos\beta$ y $\cos\beta = \sqrt{1-\text{sen}^2\,\beta}$

$\cos\beta = \sqrt{1 - \dfrac{9}{25}} \Rightarrow \cos\beta = \dfrac{4}{5}$ reemplazando $\dfrac{BA}{\frac{4}{5}} = \dfrac{20}{3}$

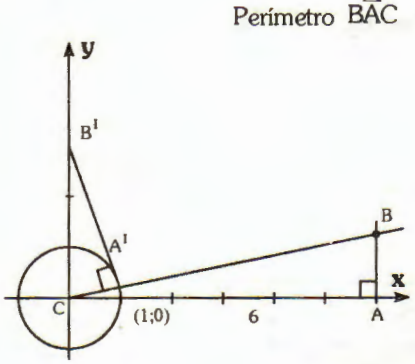
$\overline{BA} = \dfrac{20}{3} \cdot \dfrac{4}{5} \Rightarrow \overline{BA} = \dfrac{16}{3}$

$$\text{Sup } \hat{BAC} = \frac{4 \text{ cm} \cdot 16 \text{ cm}}{2 \cdot 3}$$

Sup $\hat{BAC}$ = 10.66 cm²

14) Se grafica γ y se construye el $\hat{BAC}$

$$\text{Perímetro } \hat{BAC} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}$$



Cálculo de $\overline{B'A'}$

$\overline{B'A'} = \sqrt{9-1} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Comparamos

$\hat{BAC}$ y $\hat{B'A'C}$ $\begin{cases} BAC = B'A'C = 1R \\ BCA = CB'A' \text{ por tener igual complemento.} \end{cases}$

$\Rightarrow \hat{BAC} \sim \hat{B'A'C}$

Por lo tanto $\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{B'A'}} \Rightarrow \frac{\overline{BA}}{1} = \frac{3}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{BA} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{B'A'}} \Rightarrow \frac{\overline{BC}}{3} = \frac{6}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{BC} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$$

Perímetro $\overset{\triangle}{BAC} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm + $\frac{9\sqrt{2}}{2}$ cm + 6 cm

Perímetro $\overset{\triangle}{BAC}$ = 6 cm $(\sqrt{2}+1)$

15) a) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{cosec}\alpha = 3$; $\sec\alpha = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{cotg}\alpha = -2\sqrt{2}$

b) $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{4}{3}$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$; $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{5}{3}$; $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$; $\sec\alpha = -\frac{5}{4}$

c) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$; $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{-4\sqrt{15}}{15}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$ $\operatorname{cotg}\alpha = -\frac{\sqrt{15}}{15}$

d) $\operatorname{cosec}(-\alpha) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$ $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{7}}{3}$; $\sec\alpha = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\sqrt{7}}{7}$; $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{\sqrt{7}\sqrt{2}}{2}$

16) Identidades

17) a) $\beta = K\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha = K\pi \Rightarrow \alpha = K\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\alpha = (2K-1)\frac{\pi}{2}}$

b) $\boxed{\alpha = (K-1)\pi}$

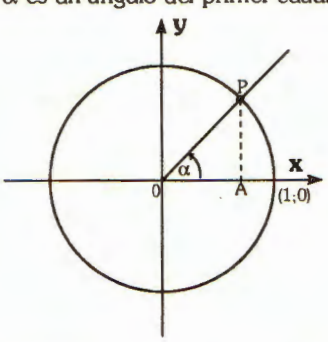
18) Identidades

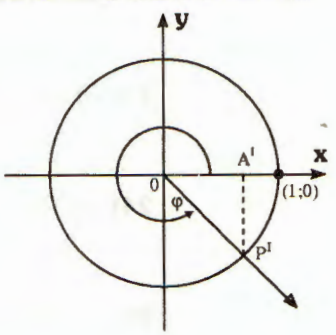
19) Identidades

20) Dos ángulos α y β difieren en 270° si :

$\beta - \alpha = 270° \quad \Rightarrow \quad \beta = 270° + \alpha$

Si α es un ángulo del primer cuadrante, 270° + α pertenece al cuarto cuadrante.





Comparando $\overset{\triangle}{OAP}$ y $\overset{\triangle}{O'A'P'}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1R \\ \alpha = O'P'A' \ (\ O'P'A' = \varphi \text{ por alternos internos y } \varphi = \alpha \Rightarrow O'P'A' = \alpha) \end{cases}$

$\overline{OP} = \overline{O'P'} = 1$

resulta $\overset{\triangle}{OAP} \sim \overset{\triangle}{O'A'P'}$ luego $\overline{A'P'} = \overline{OA}$ ⇒ ordenada de P' = – abscisa de P

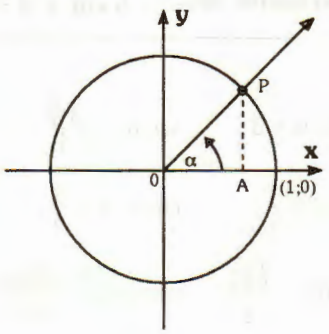
$$\boxed{\textbf{sen } (270° + \alpha) = -\cos \alpha}$$

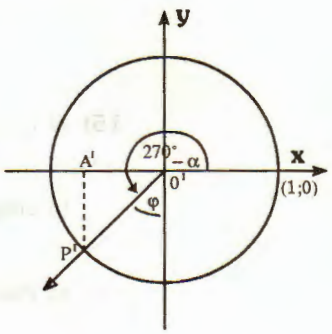
y $\overline{O'A'} = \overline{AP}$ ⇒ abscisa de P' = ordenada de P

$$\Rightarrow \boxed{\textbf{cos } (270° + \alpha) = \text{sen } \alpha}$$

21) $\alpha + \beta = 270° \Rightarrow \beta = 270° - \alpha$

Si α es un ángulo del primer cuadrante, 270° pertenece al tercer cuadrante.





Comparando

$\overset{\triangle}{OAP}$ y $\overset{\triangle}{O'A'P'}$ $\begin{cases} OAP = O'A'P' = 1R \\ \alpha = A'P'O' \ (A'P'O' = \varphi \text{ por alternos internos y } \varphi = \alpha \Rightarrow A'P'O' = \alpha) \\ \overline{OP} = \overline{O'P'} = 1 \end{cases}$

Resulta $\overset{\triangle}{OAP} \sim \overset{\triangle}{O'A'P'}$, luego $\overline{A'P'} = \overline{OA}$ ⇒ ordenada de P' = – abscisa de P

$$\Rightarrow \boxed{\textbf{sen } (270° - \alpha) = -\cos \alpha}$$

y $\overline{O'A'} = \overline{AP}$ ⇒ abscisa de P' = – ordenada de P

$$\Rightarrow \boxed{\textbf{cos } (270° - \alpha) = -\text{sen } \alpha}$$

22) Identidades

23) a) $x = \frac{22}{5}$ b) $x = \frac{8}{3}(\sqrt{2} - 1)$ c) $x = 4(1 - \sqrt{15})$ d) $x = \frac{27}{16}$

24) a) 0 b) 0 c) 1 d) $2\,\text{cotg}^2 \alpha$

25) F , V , V , V , V , F

26) a) $x = -\frac{3}{2}$; b) $x_1 = 2$; $x_2 = 1$ c) $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ d) $x_1 = \frac{+\sqrt{10}}{3}$; $x_2 = \frac{-\sqrt{10}}{3}$

27) a) $x = 19°$ b) $x = 20°$ c) $x = 3°\ 40'$ d) $x_1 = 4$ $x_2 = -4$

28) a) $\begin{cases} \cos y = 1 - \operatorname{sen} x \\ \cos y = 2 - \sqrt{3}\cos x \end{cases} \Rightarrow -1 - \operatorname{sen} x = -\sqrt{3}\cos x$

Entonces $1 + 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x = 3\cos^2 x$

$4\operatorname{sen}^2 x + 2\operatorname{sen} x - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1$ no sirve pues sería $\cos y = 2$

$\Downarrow$

$\boxed{\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}}$

$\Rightarrow \cos y = 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2}$

$\sqrt{3}\cos x = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}}$

luego $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \wedge \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ o $y = \frac{5\pi}{3}$

$S = \left\{(x;y) \ / \ x = \frac{\pi}{6} \wedge y = \frac{\pi}{3}\right\} = \left\{\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right)\right\}$

b) $S = \left\{\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{2}; 0\right)\right\}$

c) $S = \left\{\left(0; \frac{\pi}{6}\right), \left(0; \frac{5\pi}{6}\right)\right\}$

29) a) 0; b) $\frac{-1-\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt{3} + 1$; d) -4; e) $-\frac{1}{2}(\sqrt{2} + 1)$

30) a) F F V b) V F F c) F V V

31) a) $\frac{1-h}{h}$ b) $-b$

32) a) $x = 90°$ b) $\begin{cases} x_1 = 45° \\ x_2 = 225° \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 30° \\ x_2 = 150° \\ x_3 = 210° \\ x_4 = 330° \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = 17°30' \\ x_2 = 107°30' \end{cases}$ e) $x = 0°$ f) $x = 270°$

g) $\begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 180° \\ x_3 = 135° \\ x_4 = 315° \end{cases}$ h) $\begin{cases} x_1 = 30° \\ x_2 = 150° \end{cases}$ i) $\begin{cases} x_1 = 90° \\ x_2 = 270° \\ x_3 = 30° \\ x_4 = 150° \\ x_5 = 210° \\ x_6 = 330° \end{cases}$

33) a) $\log_{\cos x} 2 \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow (\cos x)^0 = 2 \operatorname{sen} x$

$\Rightarrow \frac{1}{2} = \operatorname{sen} x \Rightarrow \boxed{x = 30°}$

Recordar:
$\log_b y = x \Leftrightarrow b^x = y$
si $\begin{cases} y > 0 \\ b > 0 \end{cases}$ $b \neq 1$

b) $\cos x = 1 - \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow \quad \cos x = \cos^2 x$

$\cos x (\cos x - 1) = 0 \quad \cos x_1 = 0 \quad \cos x_2 = 1 \Rightarrow \nexists$ solución

c) $x = 60°$

d) $x = 45°$

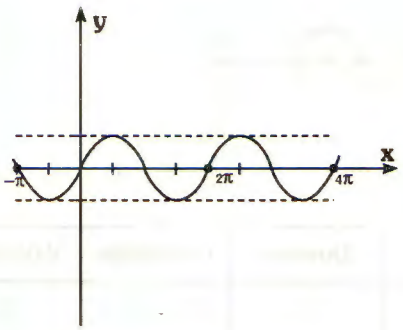
e) $\operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \nexists$ solución

f) $x = 45°$

GUIA DE ESTUDIO III

Para Aplicar (A)

(a)



(b) b_1) Dom sen = $\{x / x \in R\}$

b_2) Cod sen = $\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$

b_3) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ y $\frac{\pi}{6} \neq \frac{5\pi}{6}$

b_4) El valor máx. es **1** y se alcanza para $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi$

b_5) El valor mín. es **-1** y se alcanza para $x = \frac{3\pi}{2} + 2K\pi$

b_6) $0 < x < \pi$

b_7) $\pi < x < 2\pi$

b_8) $x = K\pi$

b_9) y = sen x es una función **impar** porque para todo x $\quad f(-x) = -f(x)$

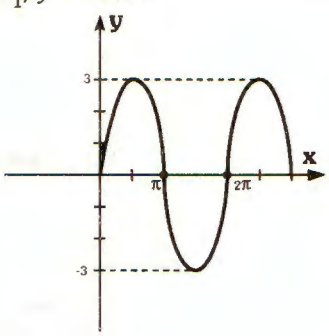
$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

(c)

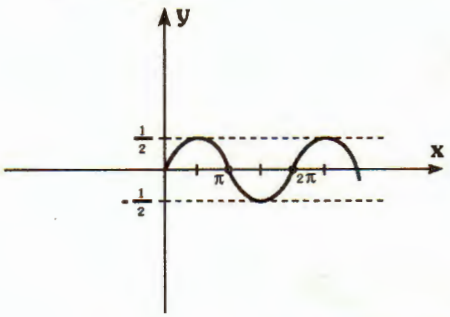
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
y = sen x	R	$-1 \leq y \leq 1$	1	-1	2π

TABLA I

(d) d_1) y = 3 sen x



$d_2)\ y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

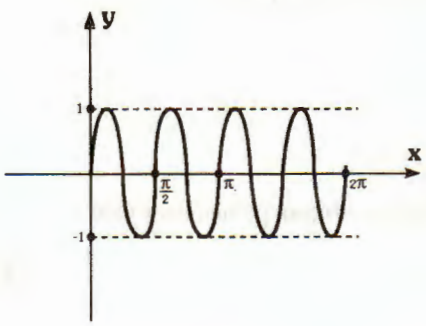


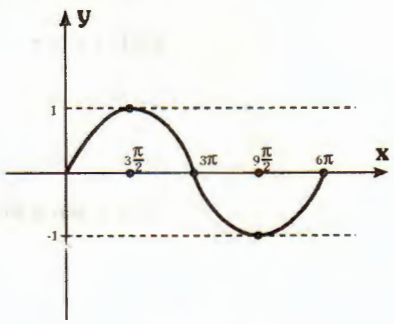
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
$y = 3 \operatorname{sen} x$	R	$-3 \le y \le 3$	3	-3	2π
$y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$	R	$-\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	2π

TABLA II

(e) A indica el máximo valor que toma la ordenada de los puntos de su gráfica.

(f) $f_1)\ y = \operatorname{sen} 4x$ $\qquad$ $f_2)\ y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$



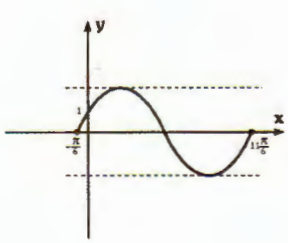


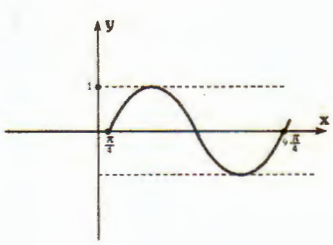
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
$y = \operatorname{sen} 4x$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	$\frac{\pi}{2}$
$y = \operatorname{sen} \frac{1}{3}x$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	6π

TABLA III

(g) $T = \frac{2\pi}{B}$

(h) $h_1)\ y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ $\qquad$ $h_2)\ y = \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$





	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
$y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	2π
$y = \text{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	2π

TABLA IV

(i) - C indica **la abscisa del comienzo de la onda.**

(j)

	Amplitud (A)	Pulsación (B)	Período (T)	Áng. de Fase $\left(-\frac{C}{B}\right)$
$y = 2 \text{ sen } x$	2	1	2π	0
$y = \text{sen } \frac{x}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	4π ①	0
$y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$	1	1	2π	$-\frac{\pi}{6}$
$y = \text{sen } 2(x + \pi)$	1	2 ②	π	$-\pi$
$y = \frac{2}{3}\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	1	2π	$\frac{\pi}{3}$
$y = \text{sen}\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$	1	3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{9}$

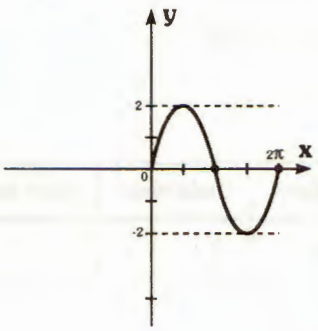
① Recordar

$$T = \frac{2\pi}{B}$$

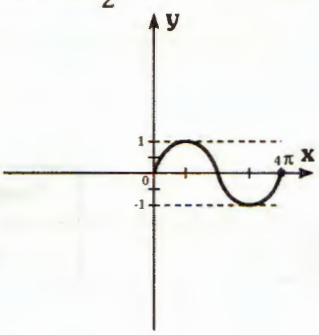
② Recordar

$y = \text{sen } (2x + 2\pi)$

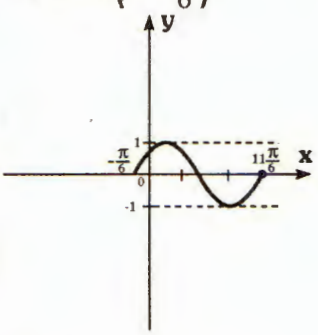
(k) $y = 2 \text{ sen } x$



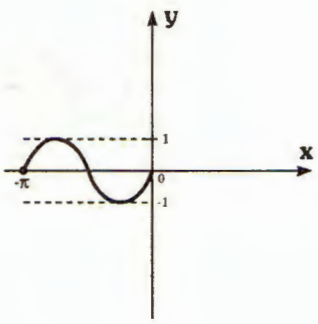
$y = \text{sen } \frac{x}{2}$



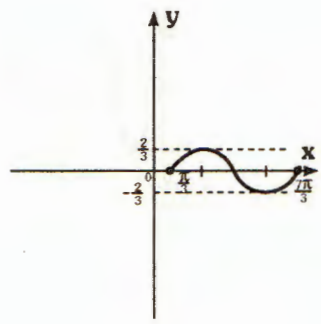
$y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$



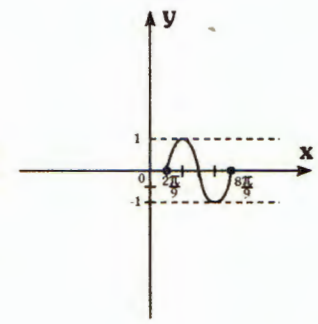
$y = \text{sen } 2(x + \pi)$



$y = \frac{2}{3}\text{sen}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

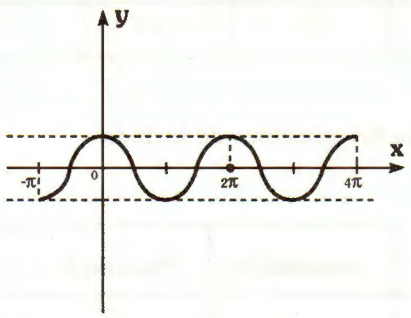


$y = \text{sen}\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right)$



Para Aplicar (B)

(a)



(b) b_1) Dom cos = $\{x/x \in R\}$

b_2) Cod cos = $\{y \in R / -1 \leq y \leq 1\}$

b_3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}$

CONCLUSIÓN: la función coseno no es biyectiva.

b_4) El valor máx. es **1** y se alcanza para $x = 0 + 2K\pi$.

b_5) El valor mín. es **-1** y se alcanza para $x = \pi + 2K\pi$.

b_6) Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$

b_7) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

b_8) $x = \frac{\pi}{2} + K\pi$

b_9) y = cos x es una función **par** porque para todo x, f(x) = f(-x) es decir cos x = cos (-x).

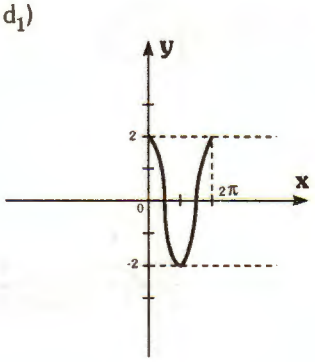
b_{10})El período de la función coseno es 2π.

(c)

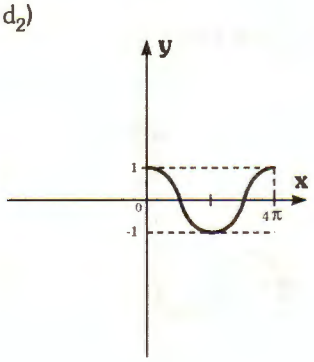
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
y = cos x	R	$-1 \leq y \leq 1$	1	-1	2π

TABLA V

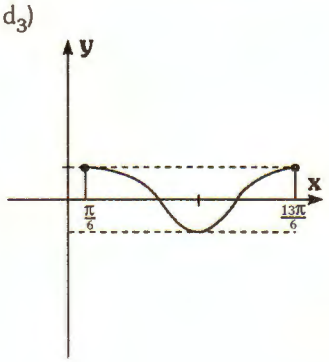
(d) d_1)



d_2)



d_3)



ⓔ

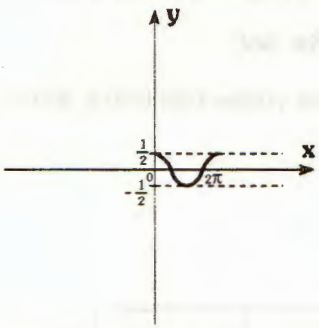
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
$y=2\cos x$	R	$-2 \le y \le 2$	2	-2	2π
$y=\cos\frac{1}{2}x$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	4π
$y=\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$	R	$-1 \le y \le 1$	1	-1	2π

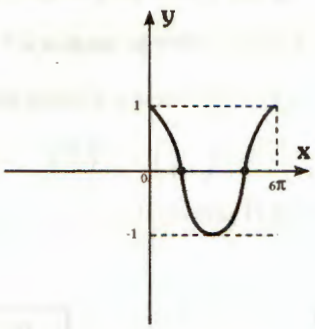
TABLA VI

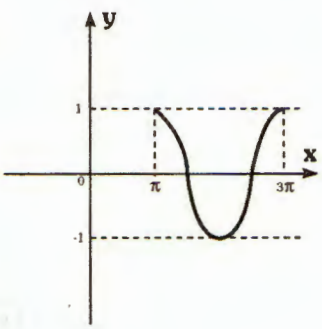
ⓕ

	Amplitud (A)	Pulsación (B)	Período (T)	Ang. de Fase $\left(\frac{C}{B}\right)$
$y=\frac{1}{2}\cos x$	$\frac{1}{2}$	1	2π	0
$y=\cos\frac{x}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	6π	0
$y=\cos(x-\pi)$	1	1	2π	π
$y=0{,}5\cos 2x$	0,5	2	π	0
$y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$	1	3	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{9}$
$y=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$	4	2	π	$-\frac{\pi}{8}$

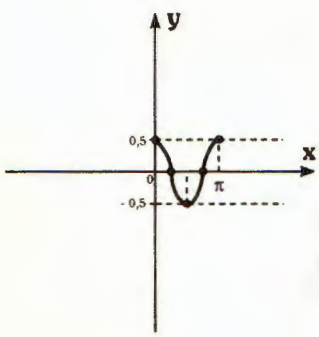
ⓖ $y=\frac{1}{2}\cos x$ $\quad y=\cos\frac{x}{3}$ $\quad y=\cos(x-\pi)$

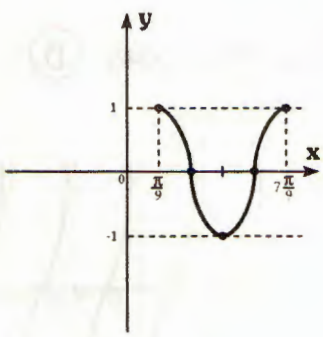


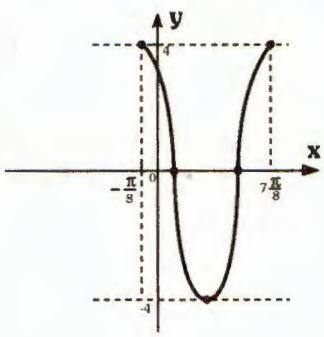




$y=0{,}5\cos 2x$ $\quad y=\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)$ $\quad y=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

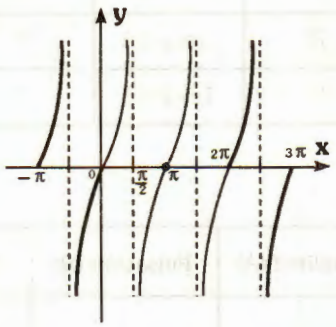






Para Aplicar (C)

(a)



(b) b_1) Dm tg = $\left\{x \in R / x \neq (2K+1)\frac{\pi}{2}, K \in Z\right\}$

b_2) Cod tg = $\{y / y \in R\}$

b_3) $f(0) = f(\pi)$ y $0 \neq \pi$

CONCLUSIÓN: La función tangente no es biyectiva.

b_4) La función **tangente no alcanza** un valor máximo **ni** un valor mínimo.

b_5) Los valores de la función son positivos entre 0 y 2π si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ o $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

b_6) Los valores de la función son negativos entre 0 y 2π si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ o $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

b_7) La función se anula si $x = K\pi$, $K \in Z$.

b_8) $y = tg\ x$ es una función impar porque para todo x, $f(-x) = -f(x)$.

Ej: $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -f\left(\frac{\pi}{3}\right)$

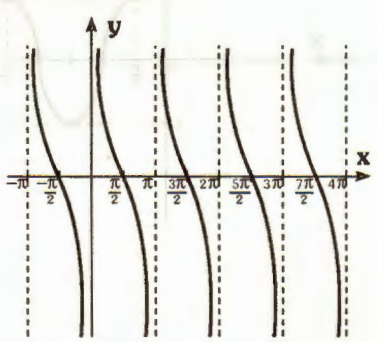
b_9) El período de la función tg es π.

(c)

	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
$y = tg\ x$	$x \in R$ y $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$	R	—	—	π

Para Aplicar (D)

(a)



ⓑ b_1) Dm cotg = $\{ x \in R / x \neq K\pi, K \in Z\}$;

b_2) Cod cotg = $\{y / y \in R\}$

b_3) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ y $\frac{\pi}{2} \neq \frac{3\pi}{2}$

CONCLUSIÓN: La función cotangente no es biyectiva.

b_4) La función **cotangente no alcanza** un valor máximo **ni** un valor mínimo.

b_5) Los valores de la función entre 0 y 2π son positivos si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ o $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

b_6) Los valores de la función entre 0 y 2π son negativos si $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ o $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$.

b_7) La función se anula si $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $K \in Z$.

b_8) y = cotg x es una función impar porque para todo x, f(-x) = - f(x).

Ej: $f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -f\left(\frac{\pi}{4}\right)$

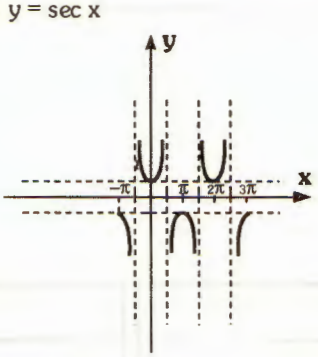
b_9) El período de la función cotg es π.

ⓒ

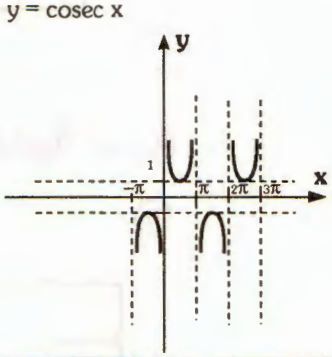
	Dominio	Codominio	Valor máx.	Valor mín.	Período
y = cotg x	$x \in R$ y $x \neq K\pi$	R	—	—	π

Para Aplicar Ⓔ

ⓐ y = sec x



y = cosec x



ⓑ

	y = sec x	y = cosec x
b_1 Dominio	$\{x \in R / x \neq (2K + 1)\frac{\pi}{2} / K \in Z\}$	$\{x \in R / x \neq K\pi, K \in Z\}$
b_2 Codominio	$\{y \in R / y \geq 1 \text{ v } y \leq -1\}$	$\{y \in R / y \geq 1 \text{ v } y \leq -1\}$
b_3 No es inyectiva porque	$f(\pi) = f(3\pi)$ y $\pi \neq 3\pi$	$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{5\pi}{2}\right)$ y $\frac{\pi}{2} \neq \frac{5\pi}{2}$
b_4 Valor máximo	—	—
b_5 Valor mínimo	—	—
b_6 Es positiva entre 0 y 2π	Si $0 < x < \frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2} < x \leq 2\pi$	Si $0 < x < \pi$
b_7 Es negativa entre 0 y 2π	Si $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$	Si $\pi < x < 2\pi$
b_8 Se anula si	—	—
b_9 Es $\overset{\text{PAR}}{\text{IMPAR}}$ porque	par porque f(x) = f(-x)	impar porque f(-x)=-f(x)

ⓑ

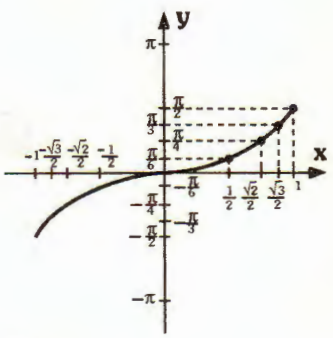
	Período
$y = \sec x$	2π
$y = \operatorname{cosec} x$	2π

Para Aplicar Ⓕ

ⓐ

x	y = arc. sen x
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
-1	$-\frac{\pi}{2}$

ⓑ



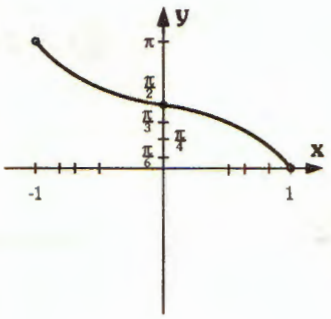
Para Aplicar Ⓖ

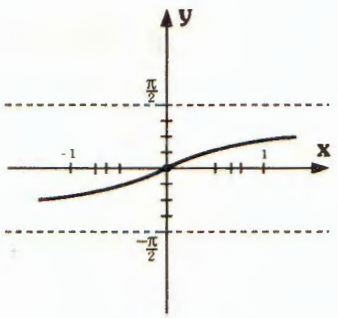
ⓐ

x	y = arc. cos x
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$
$-\frac{1}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
1	0
$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\pi}{6}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
-1	π

x	y = arc. tg x
0	0
$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$
$-\sqrt{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
-1	$-\frac{\pi}{4}$
$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$

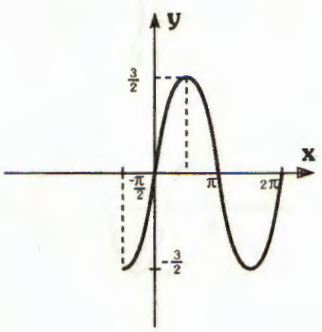
ⓑ



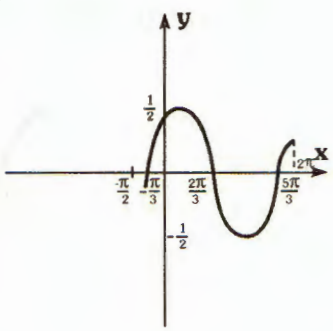


PARA EJERCITAR

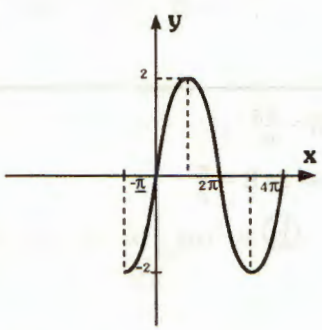
1) ⓐ $y = \frac{3}{2} \operatorname{sen} x$



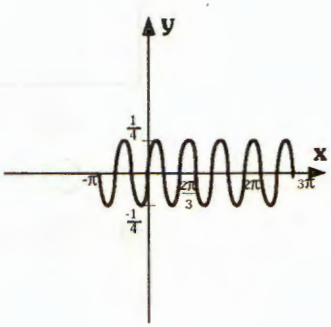
ⓑ $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$



ⓒ $y = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}$



ⓓ $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} 3\left(x - \frac{2\pi}{3}\right)$



2) ⓐ $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$, abscisa de $R = \pi$

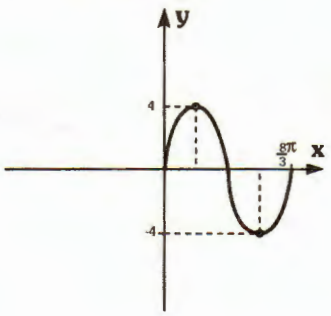
recordar $T = \frac{2\pi}{B}$,

en este caso $T = 4\pi$ luego, $4\pi = \frac{2\pi}{B} \Rightarrow \boxed{B = \frac{1}{2}}$

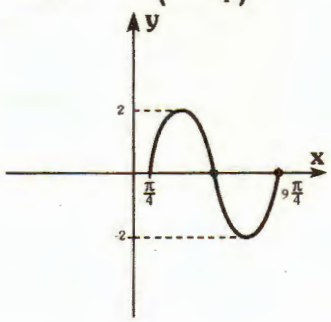
ⓑ $y = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ abscisa de $R = \frac{4}{3}\pi$

ⓒ $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{4}{3} x$ abscisa de $R = \frac{9}{8}\pi$

3) ⓐ $y = 4 \operatorname{sen} \frac{3}{4}x$

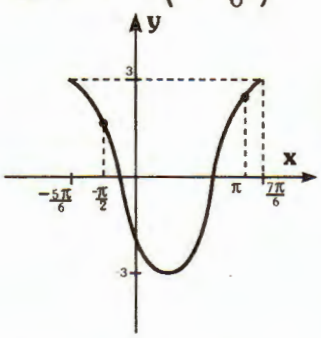


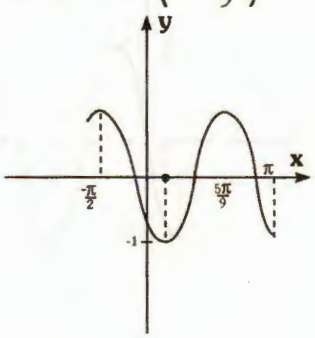
ⓑ $y = 2 \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

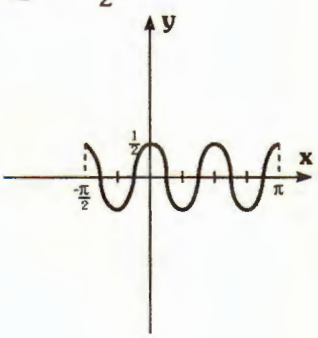


Recordar: $T = \frac{2\pi}{B}$ $\quad 480° = \frac{360°}{B}$ $\quad B = \frac{\frac{3}{360°}}{\frac{480°}{4}}$ $\quad B = \frac{3}{4}$

4) ⓐ $y = 3 \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right)$ ⓑ $y = \cos 2\left(x - \frac{5\pi}{9}\right)$ ⓒ $y = \frac{1}{2}\cos 4x$







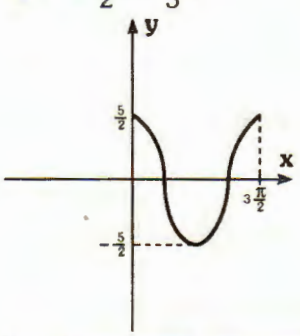
5) ⓐ $y = 2 \cos \frac{3x}{2}$ abscisa de $R = \frac{2\pi}{3}$

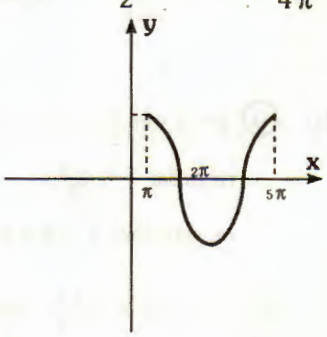
Recordar: $T = \frac{4\pi}{3} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow B = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}}$ $\quad B = \frac{3}{2}$

ⓑ $y = \cos 2x$ abscisa de $R = \frac{3\pi}{4}$

ⓒ $y = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ abscisa de $R = \frac{\pi}{2}$

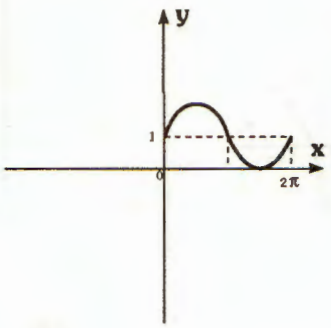
6) ⓐ $y = \frac{5}{2}\cos \frac{4}{3}x$ ⓑ $y = \cos \frac{1}{2}(x - \pi)$ $\quad B = \frac{2\pi}{4\pi}$; $B = \frac{1}{2}$





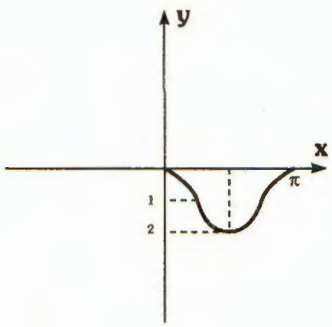
Recordar: $B = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{2}}$ $\quad B = \frac{4}{3}$

7) ⓐ $y = 1 + \operatorname{sen} x$



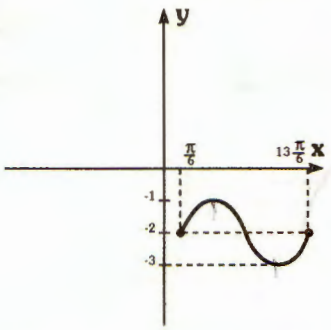
$Cod=\{y \in R / 0 \leq y \leq 2\}$

ⓑ $y = -1 + \cos 2x$



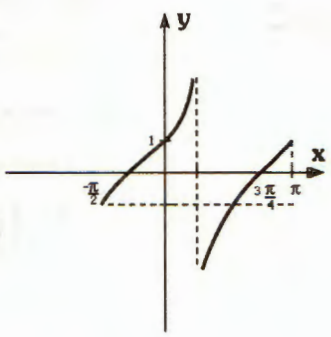
$Cod = \{ y \in R / -2 \leq y \leq 0 \}$

ⓒ $y = -2 + \operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

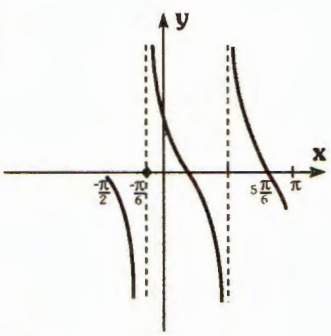


$Cod=\{y \in R / -3 \leq y \leq -1\}$

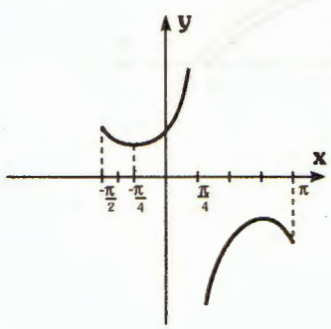
8) ⓐ



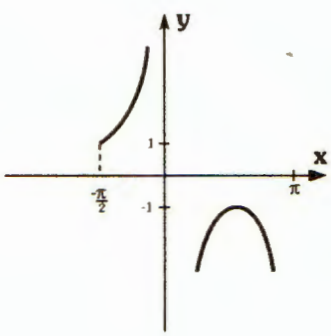
ⓑ



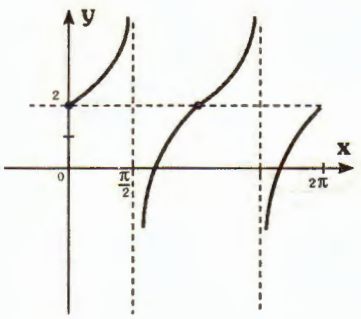
ⓒ



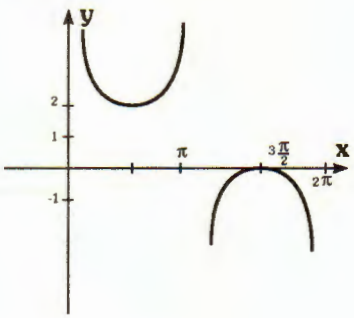
ⓓ



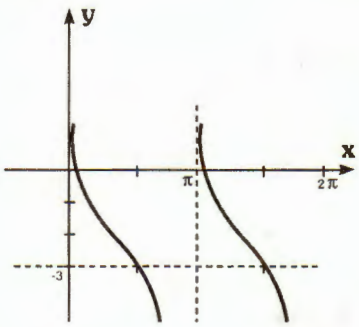
9) ⓐ $y = 2 + \operatorname{tg} x$



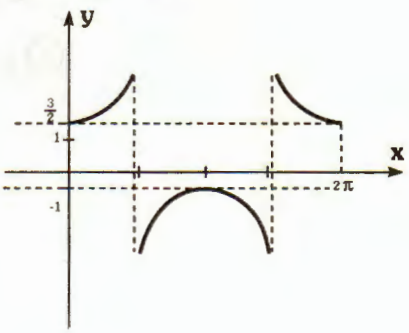
ⓑ $y = \operatorname{cosec} x + 1$



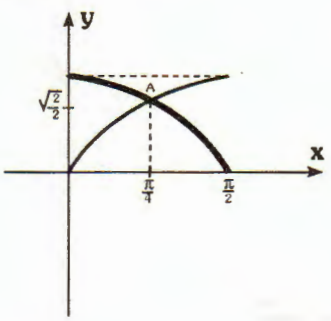
ⓒ $y = \operatorname{cotg} x - 3$



ⓓ $y = \frac{1}{2} + \sec x$



10) ⓐ



$\cos x = y$

$\operatorname{sen} x = y$

$\operatorname{sen} x = \cos x$

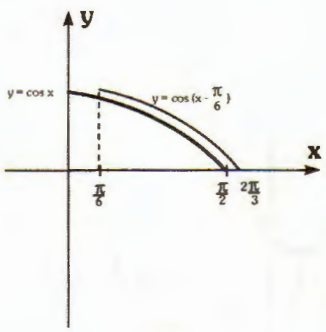
$\sqrt{1 - \cos^2 x} = \cos x$

$1 - \cos^2 x - \cos^2 x = 0$

$\frac{1}{2} = \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = \frac{\pi}{4}$

$S = \left\{\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

ⓑ



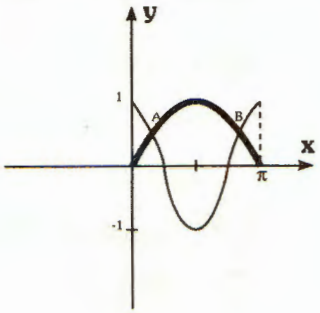
$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos x \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} = x$

$\Rightarrow 0 = \frac{\pi}{6}$ no hay intersección

11) ⓐ — $y = \text{sen } x$

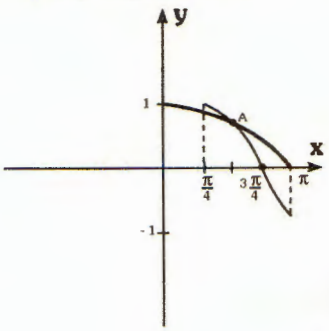
— $y = \cos 2x$.

Hay dos intersecciones A y B.

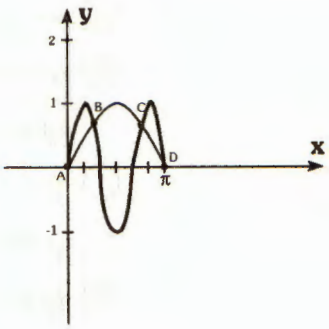


ⓑ — $y = \cos \frac{1}{2}x$ — $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Hay una intersección A.



ⓒ Hay cuatro intersecciones A, B, C y D



12) $\text{sen}\left[\text{ arc sen}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \text{sen}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$

$\text{sen}\left[\text{ arc cos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}\left[\text{ arc cos}\left(-1\right)\right] = 0$

$\cos\left[\text{ arc tg}\left(-\sqrt{3}\right)\right] = \frac{1}{2}$

$\text{arc tg}\left[\text{ sen}\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$

13) V

F

V

V

14) ⓐ $x = 2$ ⓑ $x = \frac{7}{4}$ ⓒ $x = 1$

GUIA DE ESTUDIO IV

Para Aplicar (A)

(a) a_1) $5\sqrt{5}$ a_2) Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen el mismo sentido $\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 27$.

Si $\vec{A}$ y $\vec{B}$ tienen sentidos opuestos $\Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = -27$.

a_3) $-3\sqrt{2}$ a_4) 0

(b) b_1) ángulo $(\vec{A}, \vec{B}) = 45°$; b_2) ángulo $(\vec{A}, \vec{B}) = 120°$; b_3) ángulo $(\vec{A}, \vec{B}) = 135°$

(c) c_1) $\vec{B} = 3j$; c_2) $\vec{B} = 4,2i + 5,6j$; c_3) $\vec{B}_1 = 4\frac{\sqrt{5}}{5}i - 2\frac{\sqrt{5}}{5}j$

$\vec{B}_2 = -4\frac{\sqrt{5}}{5}i + 2\frac{\sqrt{5}}{5}j$

Existen dos soluciones, $\vec{B}_1$ y $\vec{B}_2$ tienen igual dirección pero sentidos opuestos.

(d) $m = \frac{5}{2} \Rightarrow \vec{B} = \frac{5}{2}j$

(e) e_1) $m = -6 \Rightarrow \vec{B} = -6i + 2j$

e_2) $m = \frac{2}{3} \Rightarrow \vec{B} = \frac{2}{3}i + 2j$

(f) f_1) $m = 2 \Rightarrow \vec{B} = i + 2j$

f_2) $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{B} = i - \frac{1}{2}j$

(g) g_1) $m = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \vec{B} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$

g_2) $m = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \vec{B} = \frac{\sqrt{3}}{6}i + \frac{1}{2}j$

(h) h_1) $\vec{B} = -i - \sqrt{3}j$ h_2) $\vec{B}_1 = -\frac{2\sqrt{5}}{5}i - \frac{\sqrt{5}}{5}j$ h_3) $\vec{B}_1 = -2\sqrt{3}i - 2j$

$\vec{B}_2 = \frac{1\sqrt{5}i}{5} - 2\frac{\sqrt{5}}{5}j$ $\vec{B}_2 = -4j$

Para Aplicar (B)

(a) $\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

(b) $\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}(-\beta)$

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

(c) $\cos 75° = \cos(45° + 30°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

(d) $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \cos[90° - (\alpha - \beta)] = \cos[(90° - \alpha) + \beta] =$

$= \cos(90° - \alpha)\cos\beta - \operatorname{sen}(90° - \alpha)\operatorname{sen}\beta =$

$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \cos\alpha \operatorname{sen}\beta}$$

(e) $\operatorname{sen} 15° = \operatorname{sen}(45° - 30°) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

(f) $$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}[\alpha - (-\beta)] = \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \operatorname{sen}\beta \cos\alpha}$$

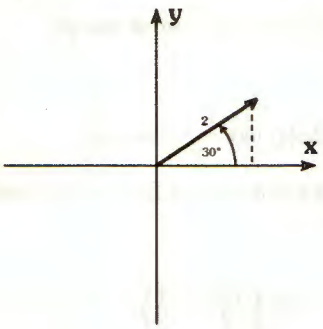
(g) $\operatorname{sen} 75° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

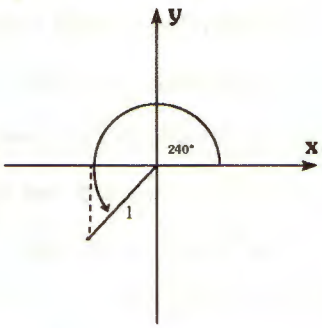
Para Aplicar ©

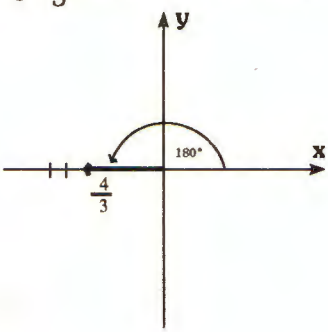
ⓐ $z_1 = \sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$; $z_2 = 2\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

$z_3 = 2\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$; $z_4 = 4\,(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)$

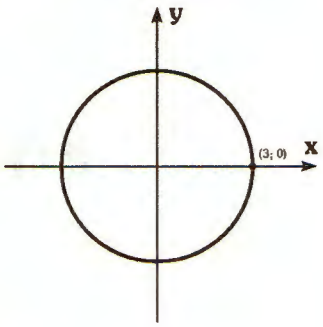
ⓑ $z_1 = 2(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°)$; $z_2 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240°$ $Z_3 = \frac{4}{3}(\cos 180° + i \operatorname{sen} 180°)$

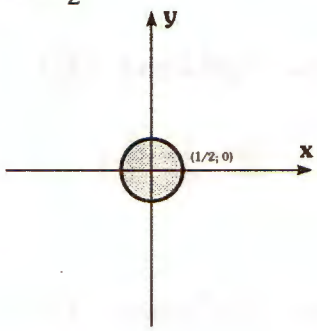




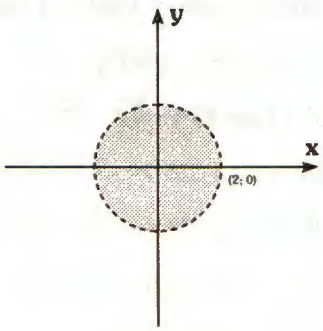


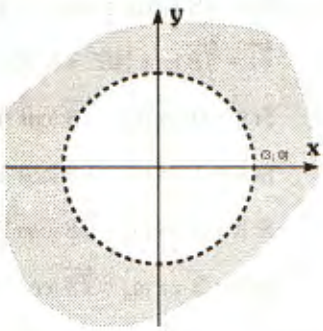
ⓒ $|z| = 3$ $|z| \leq \frac{1}{2}$

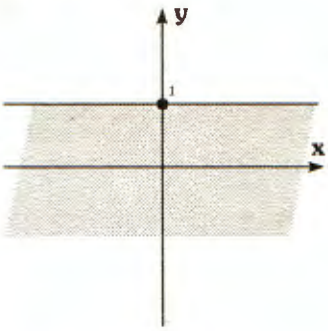




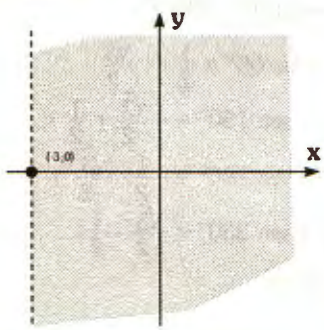
$|z| < 2$ $|z| > 3$ $\operatorname{Im}(z) \leq 1$

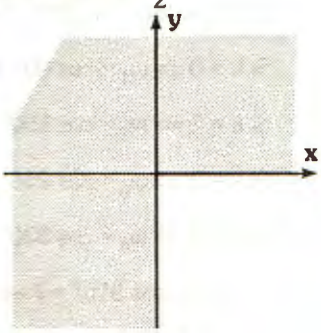


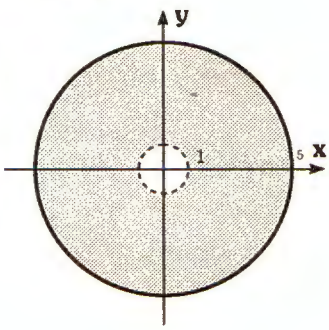




$\operatorname{R}(z) > -3$ $0 \leq \arg(z) \leq \frac{3\pi}{2}$ $1 < |z| \leq 5$







Para Aplicar (D)

(a) $z_1 \cdot z_2 = 6\,[\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°] = 6i$ $\qquad z_3 \cdot z_4 = 3$

$z_1 \cdot z_4 = 2\sqrt{3}\,(\cos 375° + i \operatorname{sen} 375°)$ $\qquad z_2 \cdot z_3 = 3\sqrt{3}\,(\cos 75° + i \operatorname{sen} 75°)$

(b) $z^2 = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \cdot \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$

$z^2 = \rho^2\,[(\cos^2\varphi - \operatorname{sen}^2\varphi) + i\,(\cos\varphi \operatorname{sen}\varphi + \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi)]$

$z^2 = \rho^2\,[\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi]$

$z^3 = z^2 \cdot z = \rho^2\,[\cos 2\varphi + i \operatorname{sen} 2\varphi]\,\rho\,[\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi]$

$z^3 = \rho^3\,[\cos 2\varphi \cos\varphi - \operatorname{sen} 2\varphi \operatorname{sen}\varphi + i\,(\operatorname{sen} 2\varphi \cos\varphi + \cos 2\varphi \operatorname{sen}\varphi)]$

$z^3 = \rho^3\,(\cos 3\varphi + i \operatorname{sen} 3\varphi)$

(c) $c_1)\ z^2 = 3^2\,(\cos 30° + i \operatorname{sen} 30°) = 9\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2}\,i$

$c_2)\ z^3 = 3^3\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = \frac{27\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{27\sqrt{2}}{2}$

Para Aplicar (E)

(a) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}\,i;$ $\qquad \frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}\,i$

Para Aplicar (F)

(a) $a_1)\ \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{8}\left[\cos\frac{1}{4}(180° + k\,360°) + i \operatorname{sen}\frac{1}{4}(180° + k\,360°)\right]$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{8}\,[\cos(45° + k\,90°) + i \operatorname{sen}(45° + k\,90°)]$

Si $k = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°) = \sqrt[4]{2} + \sqrt[4]{2}\,i$

Si $k = 1 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°) = -\sqrt[4]{2} + i\sqrt[4]{2}$

Si $k = 2 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°) = -\sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$

Si $k = 3 \Rightarrow \omega_4 = \sqrt[4]{8}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°) = \sqrt[4]{2} - i\sqrt[4]{2}$

$a_2)\ \sqrt[4]{z} = \cos\frac{1}{4}(240° + k\,360°) + i \operatorname{sen}(240° + k\,360°)$

$\sqrt[4]{z} = \cos(60° + k\,90°) + i \operatorname{sen}(60° + k90°)$

Si $k = 0 \Rightarrow \omega_1 = \cos 60° + i \operatorname{sen} 60° = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Si $k = 1 \Rightarrow \omega_2 = \cos 150° + i \operatorname{sen} 150° = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,i$

Si $k = 2 \Rightarrow \omega_3 = \cos 240° + i \operatorname{sen} 240° = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

Si $k = 3 \Rightarrow \omega_4 = \cos 330° + i \operatorname{sen} 330° = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\,i$

$a_3)\ z = 3\sqrt{2}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{18}}\left[\cos\frac{1}{4}(315° + k\,360°) + i \operatorname{sen}\frac{1}{4}(315° + k\,360°)\right]$

Si $k = 0 \Rightarrow w_1 = \sqrt[8]{18}\,(\cos 78° 45' + i \operatorname{sen} 78° 45')$

Si $k = 1 \Rightarrow w_2 = \sqrt[8]{18}\,(\cos 168° 45' + i \operatorname{sen} 168° 45')$

Si $k = 2 \Rightarrow w_3 = \sqrt[8]{18}\,(\cos 258° 45' + i \operatorname{sen} 258° 45')$

Si $k = 3 \Rightarrow w_4 = \sqrt[8]{18}\,(\cos 348° 45' + i \operatorname{sen} 348° 45')$

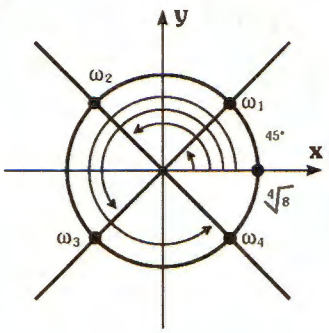
$a_4)$ $z = \cos 180° + i \operatorname{sen} 180°$

$\sqrt[4]{z} = \cos \frac{1}{4}(180° + 360° k) + i \operatorname{sen} \frac{1}{4}(180° + 360° k)$

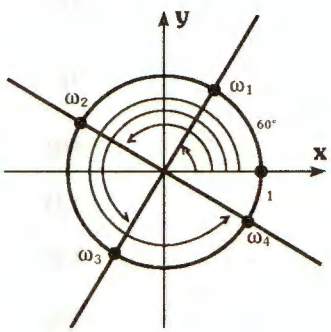
Si $k = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ Si $k = 2 \Rightarrow w_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Si $k = 1 \Rightarrow w_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ Si $k = 3 \Rightarrow w_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

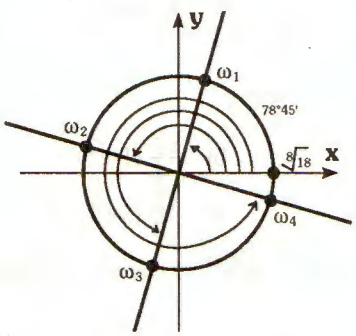
ⓑ $b_1)$



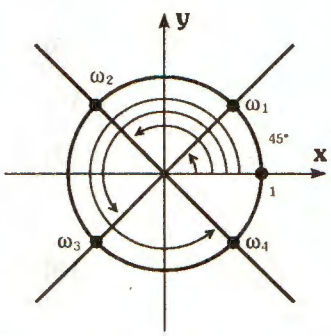
$b_2)$



$b_3)$



$b_4)$



PARA EJERCITAR

1) $\operatorname{sen} 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)$ $\cos 105° = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

2) $\cos(\beta - \alpha) = \frac{24}{25}$

3) $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\,\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\,\cancel{\cos\beta}} + \frac{\operatorname{sen}\beta\,\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha\cos\beta}} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$

$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$

4) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\frac{(9\sqrt{3} + 8\sqrt{2})}{23}$ $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{9\sqrt{21} - 25\sqrt{5}}{32}$

5) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta-1}{\operatorname{cotg}\beta+\operatorname{cotg}\alpha}$ **Sugerencia:**

1º) $\operatorname{cotg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\cos(\alpha+\beta)}{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}$

2º) Dividir numerador y denominador por $\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

6) a) $\operatorname{sen}2\alpha=\operatorname{sen}(\alpha+\alpha)=\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha+\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha=$ **$2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$**

b) $\cos 2\alpha=\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\alpha=$ **$\cos^2\alpha-\operatorname{sen}^2\alpha$**

c) $\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}(\alpha+\alpha)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\,.\,\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

7) $\operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{24}{25};\ \cos 2\alpha=\dfrac{7}{25};\ \operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{24}{7}$

8) a) $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{21}}{6}\left(\begin{array}{l}2\alpha\in 4^{\circ}C\\ \Rightarrow\alpha\in 2^{\circ}C\end{array}\right)$ b) $\operatorname{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{10}}{4}\left(\begin{array}{l}2\alpha\in 2^{\circ}C\\ \alpha\in 1^{\circ}C\end{array}\right)$

9) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=-7\dfrac{\sqrt{2}}{8}$

10) F $\operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{120}{169}$

11) $2\alpha\in 3^{\circ}C\Rightarrow\alpha\in 2^{\circ}C,\quad \operatorname{tg}\alpha=\dfrac{-4}{3}$

12) $\operatorname{tg}(2\alpha+\beta)=\dfrac{-1}{3}$

13) $\overline{AC}=10$

14) a) $\sqrt{2}\cos\alpha+1$ b) $\dfrac{2\operatorname{sen}\alpha-1}{2\operatorname{sen}\alpha+1}$

15) ———

16) $S=\{90°, 270°, 60°, 300°\}$

17) a) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$ b) $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

c) $-2\sqrt{3}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(3\sqrt{3}+1)$

18) $\cos 2\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)=\cos^2\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}\Rightarrow\cos\alpha=1-2\operatorname{sen}^2\dfrac{\alpha}{2}$

a) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ b) $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ c) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$

19) a) $\operatorname{sen}67°\,30'=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ b) $\cos 165°=\dfrac{-\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$

c) $\operatorname{tg}112°\,30'=-\sqrt{2}-1$ d) $\operatorname{sen}22°\,30'=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

20) ———

21) $\operatorname{sen}2\alpha=-\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$

22) $\operatorname{sen}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{\sqrt{6}(\sqrt{3}-\sqrt{5})}{6}\qquad \operatorname{sen}2\alpha=\dfrac{4\sqrt{5}}{9}$

23) a) $S=\left\{\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{1}{2}\right)(\pi;-1)\right\}$ b) $\begin{cases}x=60°\\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$ c) $\begin{cases}x=0°\\ y=0\end{cases}$

24)

$$\alpha + \beta = p \quad (+)$$
$$\alpha - \beta = q$$
$$2\alpha = p+q$$
$$\alpha = \frac{p+q}{2}$$

$$\alpha + \beta = p, \quad (-)$$
$$\alpha - \beta = q$$
$$2\beta = p-q$$
$$\beta = \frac{p-q}{2}$$

$\text{sen } p + \text{sen } q = \text{sen}(\alpha + \beta) + \text{sen}(\alpha - \beta)$

$\text{sen } p + \text{sen } q = \text{sen } \alpha \cos\beta + \text{sen } \beta \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cos \beta - \text{sen } \beta \cos \alpha$

$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \alpha \cos\beta$

Fórmula de la transformación en producto de la suma de 2 senos

$$\text{sen } p + \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

25) a) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ b) $2 \cos 15°$ c) $\sqrt{3} \text{ sen } 80°$ d) $\sqrt{2} \cos 25°$

26)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \alpha - \beta = q \Rightarrow \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

$\cos p + \cos q = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

$\cos p + \cos q = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta + \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta$

$\cos p + \cos q = 2\cos \alpha \cos \beta$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$$

27)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = p \Rightarrow \alpha = \frac{p+q}{2} \\ \alpha - \beta = q \Rightarrow \beta = \frac{p-q}{2} \end{cases}$$

a) $\text{sen } p - \text{sen } q = \text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta)$

$\text{sen } p - \text{sen } q = \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cos \beta + \text{sen } \beta \cos \alpha$

$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen } \beta \cos \alpha$

$$\text{sen } p - \text{sen } q = 2 \text{ sen } \frac{p-q}{2} \cdot \cos \frac{p+q}{2}$$

b) $\cos p - \cos q = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

$$\cos p - \cos q = 2 \text{ sen } \frac{p+q}{2} \cdot \text{sen } \frac{p-q}{2}$$

28) a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $-\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $2\cos^2 20°$ f) $2\operatorname{sen}^2 70°$

g) Sacar factor común $2 \Rightarrow 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \operatorname{sen} 40°\right) = 2(\operatorname{sen} 60° + \operatorname{sen} 40°) = 4 \operatorname{sen} 50° \cos 10°$

h) $-4 \operatorname{sen} 12°30' \cos 32°30'$

29) a) $\frac{2 \operatorname{sen} 4x \cos 2x}{2 \cos 7x \cos 2x} = \frac{\operatorname{sen} 4x}{\cos 7x}$ b) $\operatorname{cotg} \frac{5a}{2}$

c) $2 \cos 5°$ d) 2

30) a) Recordar ej. 27) $\cos p + \cos q = 2 \cos \alpha \cos \beta$

Luego en $2\cos \underset{\alpha}{55°} \cos \underset{\beta}{45°} = \cos(55° + 45°) + \cos(55° - 45°) =$

$= \cos 100° + \cos 10°$

b) $\operatorname{sen}(10a + 2a) - \operatorname{sen}(10a - 2a) = \operatorname{sen} 12a - \operatorname{sen} 8a$

c) $\operatorname{sen}(110° + 55°) - \operatorname{sen}(110° - 55°) = \operatorname{sen} 165° - \operatorname{sen} 55°$

d) $\cos(20° + 5°) - \cos(20° - 5°) = \cos 25° - \cos 15°$

31) a) $\begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 90° \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 = 45° \\ x_2 = 60° \\ x_3 = 120° \\ x_4 = 135° \end{cases}$ c) $\begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 180° \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 240° \end{cases}$ e) $x = 90°$ f) $\begin{cases} x_1 = 0° \\ x_2 = 180° \\ x_3 = 45° \\ x_4 = 135° \\ x_5 = 225° \\ x_6 = 315° \end{cases}$

32) ---

33) a) $(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

b) -64

c) $(-1-i)^5 = [\sqrt{2}(\cos 225° + i \operatorname{sen} 225°)]^5 = 4 + 4i$

d) $-216i$

34) $z^2 - 2z + 4 = 0 \Rightarrow 2^2 . (\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°) - 4(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°) + 4 = 0$

$$4\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 4\ \frac{1}{2} - 4i\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 = 0$$

$$-2 + 2\sqrt{3}i - 2 - 2\sqrt{3}i + 4 = 0$$

$0 = 0 \Rightarrow$ z satisface $x^2 - 2x + 4 = 0$

35) $z = \operatorname{sen} 75° + i \cos 75°$ en forma trigonométrica es

$z = \cos 15° + i \operatorname{sen} 15°$ $z^8 = \cos 120° + i \operatorname{sen} 120°$ $z^4 = \cos 60° + i \operatorname{sen} 60°$

$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i + 1 = 1 + \sqrt{3} i \neq 0 \Rightarrow$ z no satisface la ecuación.

36) a) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

$\sqrt{z} = \sqrt{2(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)} = \sqrt{2}[\cos(30° + k\,180°) + i \operatorname{sen}(30° + k\,180°)]$

Si $K = 0 \Rightarrow w_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ Si $k = 1 \Rightarrow w_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{2}\,(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)} = \sqrt[8]{2}\,[\cos(33°45' + 90°k) + i \operatorname{sen}(33°45' + 90°k)$

Si $k = 0 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 33°45' + i \operatorname{sen} 33°45')$

Si $k = 1 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 123°45' + i \operatorname{sen} 123°\,45')$

Si $k = 2 \Rightarrow \omega_3 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 213°45' + i \operatorname{sen} 213°\,45')$

Si $k = 3 \Rightarrow \omega_4 = \sqrt[8]{2}\,(\cos 303°45' + i \operatorname{sen} 303°\,45')$

c) $z = 5 - 5i = 5\sqrt{2}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$

$\sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{\sqrt{50}\,(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)} = \sqrt[10]{50}\,[\cos(63° + k\ 72°) + i \operatorname{sen}(63° + k\ 72°)]$

Si $k = 0 \Rightarrow w_1 = \sqrt[10]{50}\,(\cos 63° + i \operatorname{sen} 63°)$

Si $k = 1 \Rightarrow w_2 = \frac{-\sqrt[5]{40}}{2} + \frac{\sqrt[5]{40}}{2}\,i$

Si $k = 2 \Rightarrow w_3 = \sqrt[10]{50}\,(\cos 207° + i \operatorname{sen} 207°)$

Si $k = 3 \Rightarrow w_4 = \sqrt[10]{50}\,(\cos 279° + i \operatorname{sen} 279°)$

Si $k = 4 \Rightarrow w_5 = \sqrt[10]{50}\,(\cos 351° + i \operatorname{sen} 351°)$

37) a) $-4 - 4i$

b) $-8i$

c) $\frac{1}{8} - \frac{1}{8}i$

GUIA DE ESTUDIO V

Para Aplicar (A)

ⓐ $\alpha = 104° 28'$

ⓑ $b = 17{,}396$

ⓒ amplitud $c = 53° 27' 50''$

ⓓ $a = 10{,}55$

PARA EJERCITAR

1) a) 0,31469 0,59482 3,23826

b) 0,83570 − 0,76037 0,67486

2) a) $\begin{cases} \alpha_1 = 32°20'19'' \\ \alpha_2 = 147°39'41'' \end{cases}$ b) $\alpha = 86°14'36''$ c) $\alpha = 32°45'7''$

d) $\alpha = 111°44'3''$ e) $\alpha = 97°18'36''$

3) a) $x = 57°56'43''$ b) $\begin{cases} x_1 = 37°15'51'' \\ x_2 = 146°44' \end{cases}$ c) $x = 30°21'5''$

d) $\begin{cases} x_1 = 1°25'30'' \\ x_2 = 56°34'30'' \end{cases}$ e) $x = 64° 21' 9''$

4) a) $x = 63°26'6''$ **Verificación**

b) $\begin{cases} x_1 = 21°48'54'' \\ x_2 = 68°11'6'' \end{cases}$

$\text{sen } 63°26'6'' = 2 \cos 63°26'6''$

$0{,}89442 = 2.0{,}44721$

$0{,}89442 = 0{,}89442$

c) $x = 90°$ d) $x = 24°54'23''$ e) $x = 65°31'48{,}7''$

5) a) Aplicando el teorema de Pitágoras

$c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = 9{,}75$

$\text{sen } \beta = \frac{b}{a} \Rightarrow \text{sen } \beta = 0{,}58333 \Rightarrow \beta = 35°41'8''$

$\cos \gamma = \frac{b}{a} \Rightarrow \cos \gamma = 0{,}58333 \Rightarrow \gamma = 54°18'52''$

$\text{Área } \hat{ABC} = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow \text{Área } \hat{ABC} = \frac{b \cdot \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \Rightarrow \text{Área } \hat{ABC} = 34{,}13$

b) $\begin{cases} a = 12{,}81 \\ \beta = 38°39'35'' \\ \gamma = 51°20'25'' \\ \text{Área } \hat{ABC} = 40 \end{cases}$ c) $\begin{cases} b = 5{,}36 \\ c = 11{,}85 \\ \gamma = 65°40' \\ \text{Área } \hat{ABC} = 31{,}76 \end{cases}$

d) $\begin{cases} a = 6{,}29 \\ b = 3{,}81 \\ \beta = 37°20' \\ \text{Área } \hat{ABC} = 9{,}52 \end{cases}$ e) $\begin{cases} a = 6{,}95 \\ c = 3{,}51 \\ \beta = 59°40' \\ \text{Área } \hat{ABC} = 10{,}44 \end{cases}$

6) 30° y 60°

7) 71°33'54" y 18°26'6"

8) 75°57'49" y 14°2'11"

9) 19°28'16"

10) Sup $\hat{ABC} = 5522\ cm^2$

11) Sup $\hat{ABC} = 224{,}26\ cm^2$

12) $H_B = 22{,}94$

13) 75°31'20"

14) 39°13'53" y 50°46'7"

15) a) 49,09 m b) 33°41'24"

16) 0,7174

17) 19,16 cm

18) 9,19 cm

19) $\overline{AC} = 6{,}93$ $\alpha = 30°$

20) $\beta = 18°26'6"$ $\gamma = 71°33'54"$

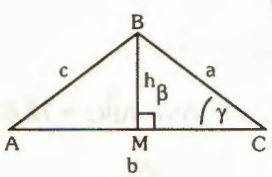
21) $\alpha = \gamma = 50°46'7"$ $\beta = 78°27'46"$

22) a) 63°26'6" b) 108°26'5"

23) a) $\beta = 53°7'48"$ b) $\beta = 26°33'54"$

24) a) 71°33'54" b) 58°40'16"

25)



Área $\hat{ABC} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BM}}{2}$ ① pero en $\hat{BMC}$ sen $\gamma = \dfrac{\overline{BM}}{\overline{BC}}$

$\overline{BM} = \overline{BC}$ **sen** γ reemplazando en ①

Área. $\hat{ABC} = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BC}\,\text{sen}\,\gamma}{2}$

luego $\boxed{\textbf{Área } \hat{ABC} = \frac{1}{2} \textbf{ . b . a. sen } \gamma}$

26) Por el teorema del seno $\dfrac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \dfrac{b}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{c}{\text{sen}\,\gamma}$ $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\text{sen}\,\beta} = \dfrac{a}{b}$ y como en toda proporción: la diferencia del antecedente y consecuente de la primera razón es a su suma, como la diferencia del antecedente y consecuente de la segunda razón es a su suma..

Luego $\dfrac{\text{sen}\,\alpha - \text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta} = \dfrac{a - b}{a + b}$. Transformando en producto la suma y la diferencia de los senos (Guía N° IV).

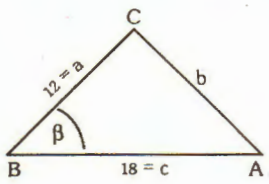
$$\frac{2\,\text{sen}\,\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\,\text{sen}\,\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{a-b}{a+b}$$

$$\text{tg}\,\frac{o-\beta}{2}\,.\,\text{cotg}\,\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a-b}{a+b}$$

luego $\boxed{\dfrac{\text{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\text{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\dfrac{a-b}{a+b}}$

27) **Cálculo de b:** Por teorema del coseno

a)



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$b^2 = 144 + 324 - 2.12.18.0{,}73826$

$b^2 = 144 + 324 - 318{,}93$

$b = 12{,}21$

Cálculo de γ : Por teorema de las tangentes

$$\frac{\text{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{\text{tg}\frac{\gamma+\alpha}{2}}=\frac{c-a}{c+a}\ ①$$

$\gamma + \alpha = 180° - \beta \Rightarrow \gamma + \alpha = 137°\ 35'$

$\dfrac{\gamma+\alpha}{2} = 68°47'30'' \Rightarrow \text{tg}\,\dfrac{\gamma+\alpha}{2} = 2{,}57704$

reemplazando en ①

$$\frac{\text{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}}{2{,}57704}=\frac{6}{30}\Rightarrow \text{tg}\frac{\gamma-\alpha}{2}=0{,}515408$$

$\dfrac{\gamma-\alpha}{2} = 27°16'\ 1''$

$-2\alpha = -83°2'58''$

$\alpha = 41°31'29''$

$\gamma - \cancel{\alpha} = 54°\ 32'2''$

$+$

$\cancel{\alpha} + \gamma = \underline{137°\ 35'}$

$2\gamma = 192°\ 7'2''$

$\gamma = 96°\ 3'31''$

Cálculo del área:

Área $\overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{2}$ a c. sen β

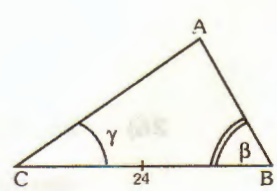
Área $\overset{\triangle}{ABC} = \frac{1}{\cancel{2}}\,\overset{6}{\cancel{12}}\,.\,18$ sen 42°25'

Área $\overset{\triangle}{ABC} = 108.0,67452 \Rightarrow$ Área $\overset{\triangle}{ABC} = 72{,}85$

b) $a = 21,31$ $\beta = 36°1'56''$ $\gamma = 20°40'4''$

Área $\overset{\triangle}{ABC} \cong 56{,}42$

28) a) **Cálculo de α:**



$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) \Rightarrow \alpha = \mathbf{48°53'50''}$

Cálculo de b:

Por el teorema del seno

$$\frac{a}{\underbrace{\text{sen}\,\alpha}_{\text{sen}(\beta+\gamma)}}=\frac{b}{\text{sen}\,\beta}\Rightarrow b=\frac{a\,.\,\text{sen}\,\beta}{\text{sen}\,(\beta+\gamma)}\Rightarrow b=\frac{24\,.\,\text{sen}\,76°\,40'}{\text{sen}\,131°\,6'\,10''}\Rightarrow \boxed{b = 30{,}99}$$

Cálculo de c:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow c = \frac{a \,.\, \operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} \Rightarrow c = \frac{24 \,.\, \operatorname{sen}54°\ 26'\ 10''}{\operatorname{sen}131°\ 6'\ 10''} \Rightarrow \boxed{c = 25{,}91}$$

$\operatorname{sen}(\beta+\gamma)$

Cálculo del área: Área $\hat{ABC} = \frac{1}{2}\, a \,.\, b \,.\, \operatorname{sen}\gamma$ pero $b = \frac{a \,.\, \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)}$

luego Área $\hat{ABC} = \frac{1}{2}\,\frac{a^2 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}(\beta+\gamma)} = \frac{1}{2}\,\frac{576 \,.\, 0{,}81347 \,.\, 0{,}97304}{0{,}75357}$

Área $\hat{ABC} = 302{,}51$

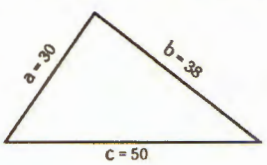
b) $\gamma = 23°8'$ $\quad a = 119,69$ $\quad b = 93{,}08$

Área $\hat{ABC} = 2188{,}476$

29) a) **Cálculo de α:**

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{900 - 1444 - 2500}{-2 \,.\, 1900}$

$\cos\alpha = 0{,}80105 \Rightarrow \alpha = \mathbf{36°46'11''}$



Cálculo de β:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta \Rightarrow \quad \cos\beta = \frac{1444 - 2500 - 900}{-3000}$

$\beta = \mathbf{49°18'26''}$

Cálculo de γ:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma \Rightarrow \quad \cos\gamma = \frac{2500 - 900 - 1444}{-2 \,.\, 1140}$

$\gamma = \mathbf{93°55'23''}$

Cálculo del área: Por la fórmula de Herón

Área $= \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$ $\qquad p = \frac{30 + 38 + 50}{2} = 59 \Rightarrow p - a = 29$

$p - b = 21$ $\qquad p - c = 9$

Área $= \sqrt{59 \,.\, 29 \,.\, 21 \,.\, 9} = 568{,}66$

b) $\alpha = 79°15'39''$, $\qquad \beta = 39°53'31''$

$\gamma = 60°50'48''$ $\qquad$ Área $= 1477{,}66$

30) a) **Cálculo de β:**

$$\frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{9 \,.\, \operatorname{sen}52°\ 20'}{12} \Rightarrow \qquad \beta = \mathbf{36°25'8''}$$

Cálculo de α:

$\alpha = 180° - (\beta + \gamma) \Rightarrow \alpha = \mathbf{91°14'52''}$

Cálculo de a:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow a = \frac{c \,.\, \operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} \qquad \mathbf{a = 15{,}16}$$

Área: $\qquad A = \frac{1}{2}\, cb \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow \mathbf{A = 53{,}99}$

b) $\alpha = 46°33'53"$ $\gamma = 24°26'7"$

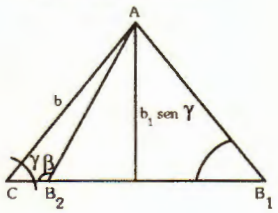
$a = 49{,}15$ $A = 650{,}63$

31) a) Como $c < b$ y $b \operatorname{sen} \gamma = 30.0{,}64279$

$b \operatorname{sen} \gamma = 19{,}28$ como $c = 22 \Rightarrow 22 > 19{,}28$

quedan determinados 2 triángulos.

FIGURA DE ESTUDIO



Cálculo de β:

$$\frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \frac{b \cdot \operatorname{sen}\gamma}{c}$$

$\operatorname{sen}\beta = 0{,}87653 \Rightarrow \beta_1 = 61°13'35"$, $\beta_2 = 118°46'$

Cálculo de α:

$\alpha_1 = 180° - (\gamma + \beta_1) = 78°46'25"$

$\alpha_2 = 180° - (\gamma + \beta_2) = 21°14'$

Cálculo de a:

$$\frac{a_1}{\operatorname{sen}\alpha_1} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow a_1 = 33{,}57$$

$$\frac{a_2}{\operatorname{sen}\alpha_2} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma} \Rightarrow a_2 = 12{,}39$$

b) Como $b < a$ $a \operatorname{sen}\beta = 12 \cdot 0{,}75 \Rightarrow a \operatorname{sen}\beta = 9$ como $b = 9$

$\Rightarrow b = a \operatorname{sen}\beta$, queda determinado un triángulo: $\alpha = 90°$

$\gamma = 41°24'34"$ $c = 7{,}9$

32) diagonal = 8,09

33) segmento de bisectriz = 7,33

34) $\overline{CM} = 19{,}51$

35) altura torre = 40,20 m

36) altura edificio = 12,6 m

37) $\overline{BD} = 21{,}31$

38) 60,76 m

39) Perím = 20,12 cm

40) $\overline{AC} = 49{,}94$ km

41) 6,99 km

42) a) 14,24 m b) 16 m

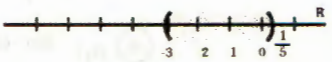
GUIA DE ESTUDIO VI

Para Aplicar (A)

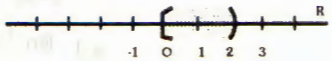
(a) $a_1)$ $\{x \varepsilon R / 2 \leq x \leq 3\}$

$a_2)$ $\{x \varepsilon R / \frac{7}{2} < x \leq 8\}$

$a_3)$ $\left\{x \varepsilon R / -3 < x < \frac{1}{5}\right\}$

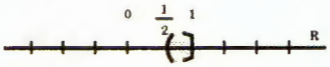


$a_4)$ $\{x \varepsilon R / 0 \leq x < 2\}$



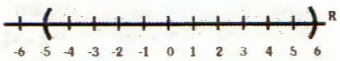
$a_5)$ $[3;7)$

$a_6)$ $\left(\frac{1}{2};1\right]$

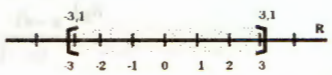


$a_7)$ $\left(2; \frac{11}{2}\right] = \left\{x \varepsilon R / 2 < x \leq \frac{11}{2}\right\}$

$a_8)$ $(-5,6)$



$a_9)$ $[-3{,}1, 3{,}1] = \{x \varepsilon R / -3{,}1 \leq x \leq 3{,}1\}$



(b) $b_1)$ $[a; \infty)$

$b_2)$ $(-\infty; a)$

$b_3)$ $(-\infty; a]$

$b_4)$ $(-\infty; +\infty)$

Para Aplicar (B)

(a) $a_1)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 5^+} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 5^-} f(x) = -1 \\ \lim\limits_{x \to 5} f(x) = -1 \end{cases}$

$a_2)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3 \end{cases}$

$a_3)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0} f(x) = 2 \end{cases}$

$a_4)$ $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -2 \\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \not{\exists} \end{cases}$

ⓑ $b_1) \frac{2}{3}$ $b_2) 0$ $b_3) -1$

$b_4) 114$ $b_5) \frac{55}{2}$ $b_6) 0$

$b_7) \frac{1}{7}$ $b_8) 0$ $b_9) \sqrt{3}+1$

$b_{10}) -1$

Para Aplicar Ⓒ

ⓐ $a_1) \lim_{x\to\pi} \operatorname{sen} x + \lim_{x\to\pi} \operatorname{tg} x = 0 + 0 = 0$

$a_2) \lim_{x\to 2} [\log(x+8) + \sqrt{7+x} = \lim_{x\to 2} \log(x+8) + \lim_{x\to 2} \sqrt{7+x} = 1 + 3 = 4$

$a_3) \lim_{x\to -6} x^{-1} \cdot \lim_{x\to -6} \sqrt[3]{x+5} = \frac{-1}{6} \cdot (-1) = \frac{1}{6}$

$a_4) \lim_{x\to 3} \cos \pi x - \lim_{x\to 3} x^3 = -1 - 27 = -28$

$a_5) \dfrac{\lim_{x\to 1} (2x - x)}{\lim_{x\to 1} (2 + \log x)} = \frac{1}{2}$

$a_6) \dfrac{\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \pi \frac{x}{3}}{\lim_{x\to 0} (x-1)} = \frac{0}{-1} = 0$

ⓑ $b_1) \frac{1}{9}$ $b_2) \frac{1}{4}$ $b_3) 144$

$b_4) 4\sqrt[3]{4}$ $b_5) 3$ $b_6) -64$

Para Aplicar Ⓓ

ⓐ $\lim_{x\to 1} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty$

ⓑ $b_1) \infty$ $b_2) \infty$

$b_3) \infty$ $b_4) \infty$

Para Aplicar Ⓔ

ⓐ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

ⓑ $b_1)\ 0$ $b_2)\ 0$ $b_3)\ +\infty$

$b_4)\ +\infty$ $b_5)\ -\infty$ $b_6)\ 3$

Para Aplicar (F)

ⓐ $a_1)\ -6$ $a_2)\ 1$ $a_3)\ +\infty$

$a_4)\ -\infty$ $a_5)\ 0$ $a_6)\ -\infty$

ⓑ $b_1)\ \frac{1}{5}$ $b_2)\ \frac{1}{3}$ $b_3)\ \infty$

$b_4)\ \infty$ $b_5)\ 3$ $b_6)\ 5$

$b_7)\ \frac{4}{5}$ $b_8)\ 2$

Para Aplicar (G)

ⓐ $a_1)$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$
2. $f(a) = b$
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Es continua en $x = a$

$a_2)$

1. $\lim_{x \to a} f(x)$ ∄
2. $f(a) = b$
3. ————

No es continua

$a_3)$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = b$
2. $f(a)$ ∄
3. ————

No es continua

$a_4)$

1. $\lim_{x \to a} f(x) = c$
2. $f(a) = b$
3. $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

No es continua

ⓑ $b_1)$ F porque $\lim_{x \to 3} \left(\frac{1}{x-3}\right) = \infty$

$b_2)$ V porque $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2} = 1$ $f(2) = 1$ y $\lim_{x \to 2} \frac{4}{x^2} = f(2)$

$b_3)$ F porque $f(-1)$ ∄

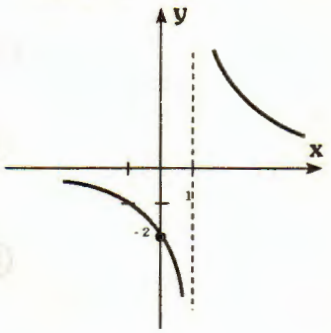
$b_4)$ F porque $f(0)$ ∄

$b_5)$ V porque $\lim_{x \to 1} \log x = 0$ $f(1)=0$ $\lim_{x \to 1} \log x = f(1)$

Para Aplicar (H)

(a) a_1) AH $y = 0$ $\quad a_2$) AH $y = 2$ $\quad a_3$) AH $y = -1$

AV $x = 0$ $\quad$ AV $x = 3$ $\quad$ AV $x = 0$



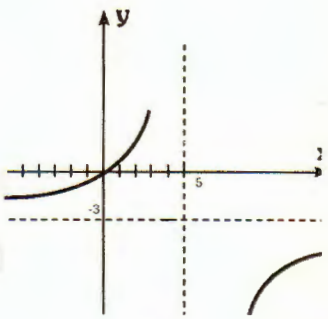
(b) b_1) AH. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x-1}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asíntota

AV. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2}{x-1}\right) = \infty \Rightarrow x = 1$ asíntota

AO. $\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x^2-x} = 0 \Rightarrow m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$

asíntota horizontal (caso particular)

b_2) AH. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+2}{5-x} = -3 \Rightarrow y = -3$ asíntota



AV. $\lim_{x\to 5}\frac{3x+2}{5-x} = \infty \Rightarrow x = 5$ asíntota

AO. $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3x+2}{5-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{3x+2}{5x-x^2} = 0$

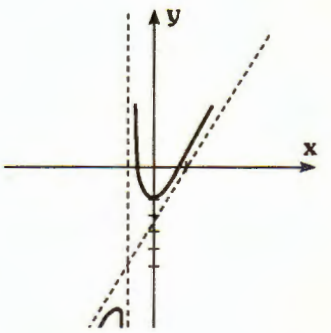
asíntota horizontal (caso particular)

b_3) AH. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x+1} = \infty$ no existe

AV. $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-1}{x+1} = \infty \Rightarrow x = -1$ asíntota

AO. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+x} = 2 \Rightarrow m = 2$

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x+1} - 2x = -2 \Rightarrow b = -2$ $\quad y = 2x - 2$ asíntota



PARA EJERCITAR

1) $(a,a) = \emptyset$, $[a,a] = \{a\}$, $[a,a) = \emptyset$, $(a, a] = \emptyset$

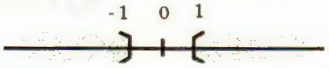
2) a) $A=[-5,5]$

b) $B=(-3,3)$

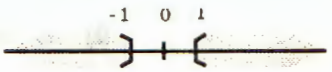
c) $-2 \le x - 1 \le 2 \Rightarrow -1 \le x \le 3$ $\quad C = [-1,3]$

d) $D = \{x \in R / -\frac{9}{4} < x < \frac{5}{4}\} = (-\frac{9}{4}, \frac{5}{4})$

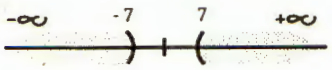
3) a) $-1 \ge x \ge 1$ $\quad x \ge 1$ o $x \le -1$



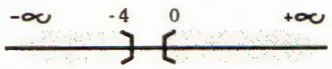
A=[1,+∞) U (-∞,-1]



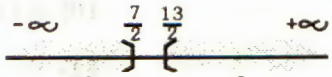
b) B = (7, + ∞) U (- ∞;-7)



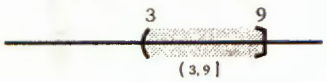
c) C = [0, + ∞) U (- ∞, - 4]



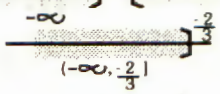
d) D = $[\frac{13}{2}, + \infty) \cup (- \infty, \frac{7}{2}]$



4) a)

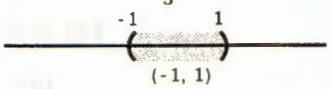


b)

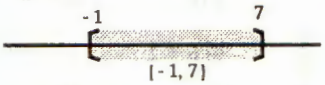


c)

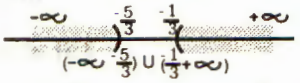
d)



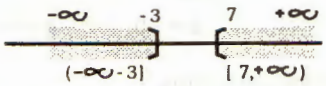
e)



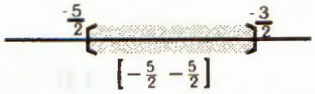
f)



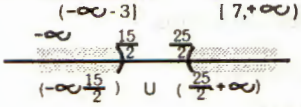
g)



h)



i)



5) a) R

b) $\{x \varepsilon R / x > -1\}$

c) $\left(-1, -\frac{2}{3}\right]$

d) $\left(\frac{1}{5}, 7\right]$

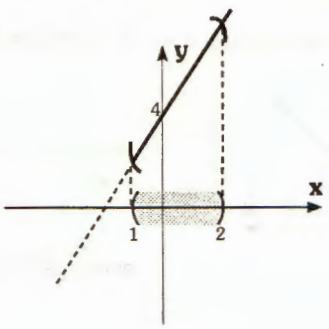
e) Ø

6) a) (- ∞, 2] U [4, + ∞)

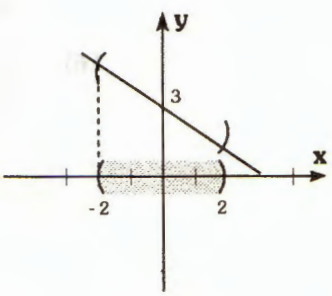
b) (- ∞, -5) U (2, +∞)

c) (-∞, 3) U [7, +∞)

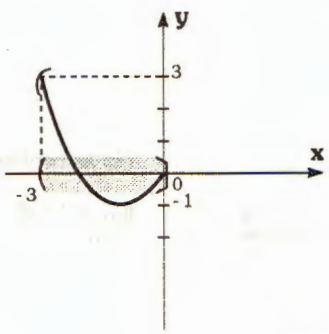
7) a)



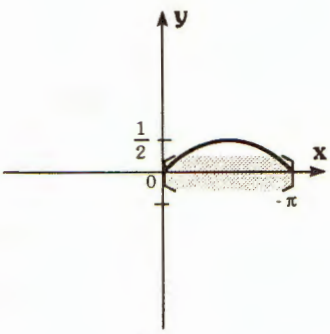
b)



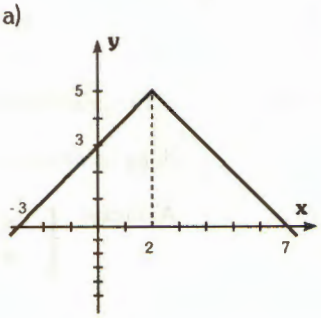
c)



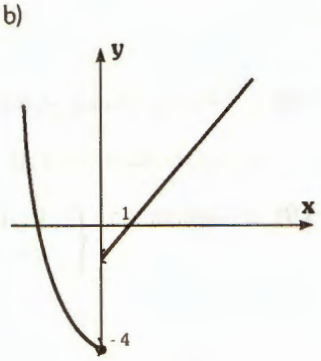
d)



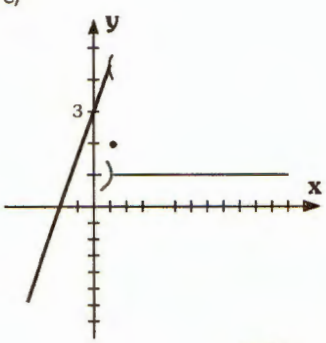
8) a)



b)



c)



9) a) Valor máx = $\frac{7}{2}$ Valor mín = $\frac{3}{2}$ b) Valor máx = 3 Valor mín = 3 c) La función tiene una ecuación $y = \frac{1}{2}(x-1)(x-3)$ Valor máx = 4 Valor mín = $-\frac{1}{2}$

10) a) 11 b) -1 c) 10 d) ∞ e) -4 f) $\frac{3\sqrt{2}}{8}$

11) a) ∞ b) 3 c) $-\infty$ d) $-\frac{1}{9}$ e) $-\frac{4}{5}$ f) 4 g) $\frac{5}{3}$ h) $\frac{1}{3}$ i) -10 j) ∞ k) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ l) 4 m) ∞

12) a) 0 b) $\frac{5}{3}$ c) 0 d) $\frac{5}{3}$ e) 1 f) $\frac{1}{2}$ g) 0 h) 4 i) $\frac{3}{2}$ j) 0 k) 2

13) a) $a = \frac{1}{2}$ $a = -\frac{1}{2}$ b) $a = 1$ $a = -5$ c) $a = 0$ $a = 6$ d) $a = 100$ e) $a = 1$ f) $x = \frac{\pi}{3}$

14) a) Es continua en todos sus puntos.

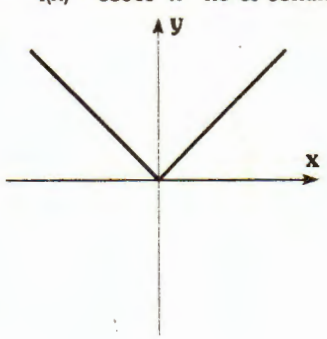
b) $x = 0$ porque $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$.

c) $x = \frac{1}{2}$ porque $\nexists \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x)$.

15) $f(x) = \operatorname{tg} x$ no es continua si $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(K \in Z)$

$f(x) = \operatorname{cosec} x$ no es continua si $x = 0 + k\pi$ $(K \in Z)$

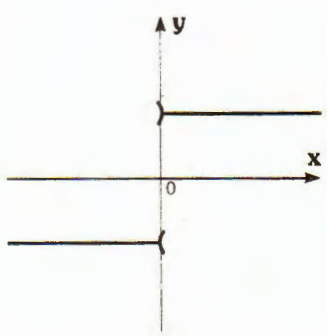
16)



$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \wedge f(0) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0, = f(0)$

entonces f es continua en $x = 0$.

17)



No es continua en $x = 0$ porque

$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \nexists$ $f(0) \nexists$

18) a) Es discontinua en $0 \in (-1,1)$

b) Es continua en (-1,1).

c) Es continua en (-1,1).

d) Es continua en (-1,1).

19) a) Discont. en $\begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$ Asíntotas $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

b) Discont. en x = -1 — Asíntotas : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$

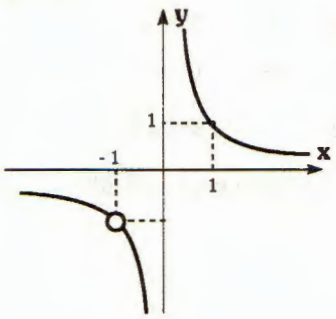
c) Discont. en $\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$ — Asíntotas: $\begin{cases} x = -1; \quad x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

d) Discont. en x = -2 — Asíntota: ————

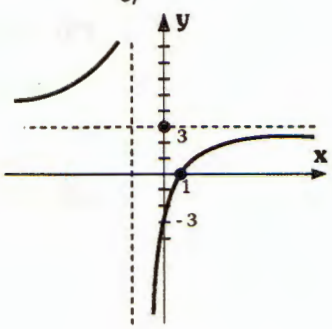
e) Discont. en x = 1 — Asíntotas : $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2x + 2 \end{cases}$

f) Es continua $\forall$ x > 0 (x ε R) — Asíntota:: ————

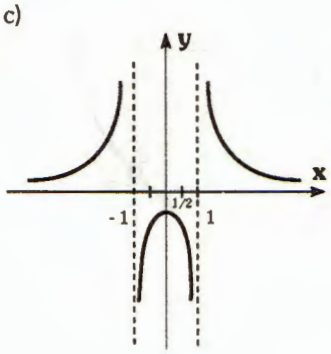
a)



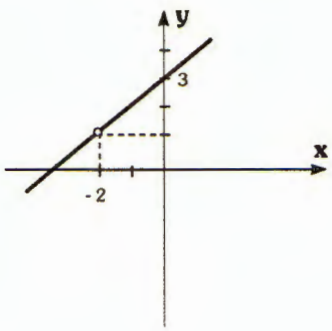
b)



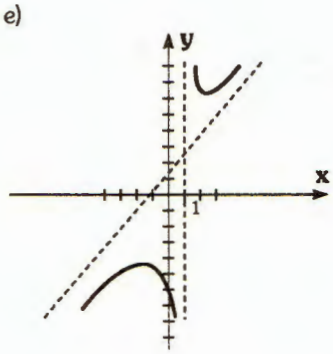
c)



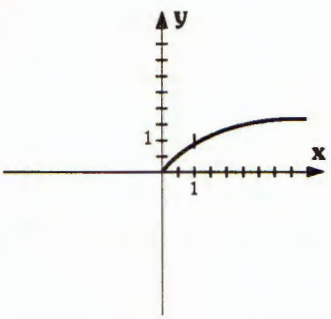
d)



e)



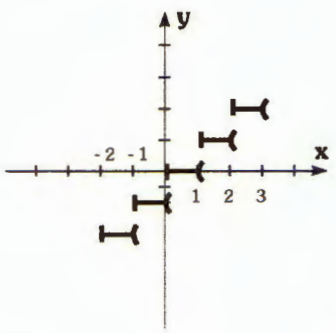
f)



20) Es discontinua para todo

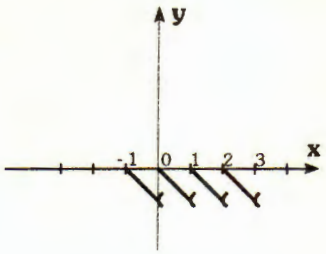
x = K, K ε Z

porque $\nexists \lim_{x \to K} f(x)$, $\forall$ K ε Z



21) a) No es continua en 0,es continua en (0,1)

b) No es continua en (-1,1)

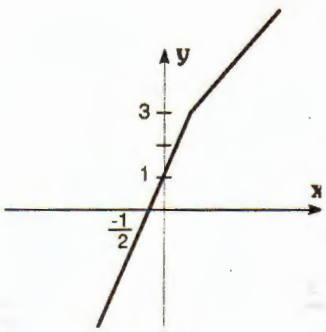


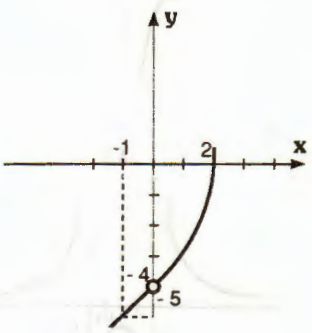
22) Es discontinua en $x = -\frac{\pi}{2}$

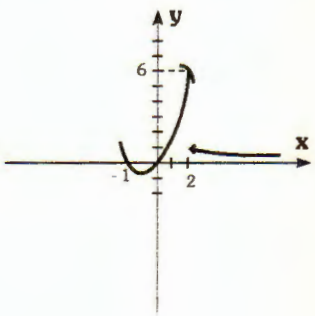
23)

a)	$y = \frac{1}{4}x$	V	$y = -\frac{1}{4}x$	F	$x = -1$	F
b)	$y = x-5$	V	$x=0$	V	$y = x+5$	F
c)	$y = 1$	F	$x = -\sqrt{2}$	F	$x = \sqrt{2}$	F

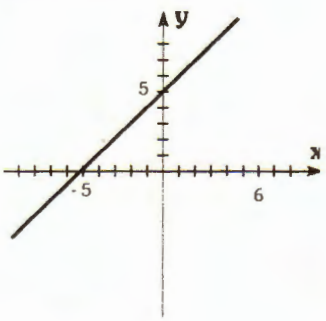
24) a) Es continua en $x_0 = 1$ b) No porque, $\nexists$ f(0) c) No, porque $\nexists \lim_{x \to 2} f(x)$







d) Es continua en x_0

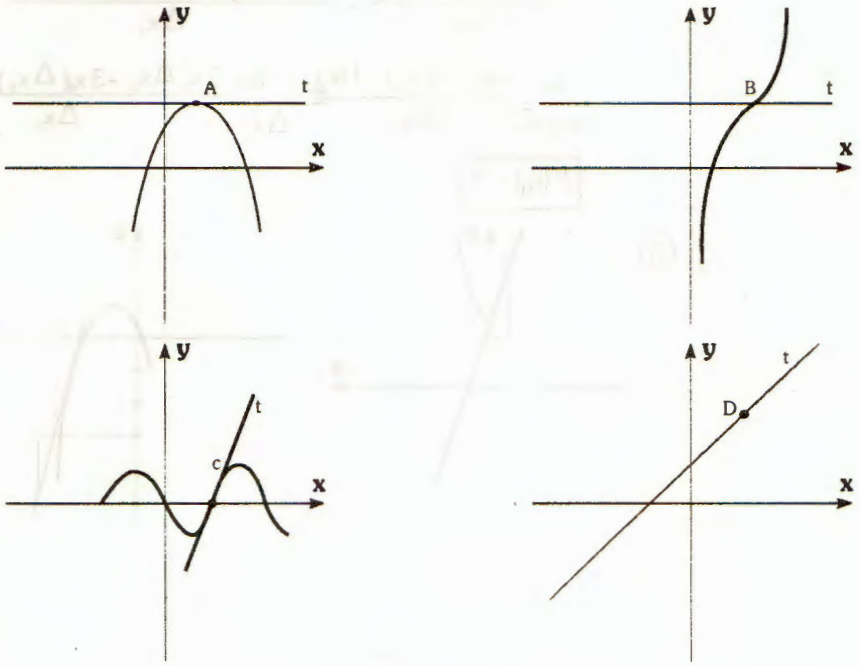


25) $f = \frac{ax + c}{ax - 2a}$

GUIA DE ESTUDIO VII

Para Aplicar (A)

(a)



(b) V, F, F, V

Para Aplicar (B)

(a) $a_1)\ f(x_0 + \Delta x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^2 + 4 = x_0^2 + 2x_0\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2 + 4$ $\qquad f(x_0) = x_0^2 + 4$

$$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \cancel{x_0^2} + 2x_0\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2 + \cancel{4} - \cancel{x_0^2} - \cancel{4}$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{2x_0\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0}$$

$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{2x_0\,\Delta x_0 + (\Delta x_0)^2}{\Delta x_0} = 2x_0$$

$\boxed{f'(x_0) = -2}$

$a_2)\ f(x_0 + \Delta x_0) = -(x_0 + \Delta x_0)^2 + 2(x_0 + \Delta x_0) = -x_0^2 - 2x_0\,\Delta x_0 - (\Delta x_0)^2 + 2x_0 + 2\Delta x_0$

$f(x_0) = -x_0^2 + 2x_0,\ f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \cancel{-x_0^2} - 2x_0\,\Delta x_0 - (\Delta x_0)^2 + \cancel{2x_0} + 2\Delta x_0 + \cancel{x_0^2} - \cancel{2x_0}$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{-2x_0\,\Delta x_0 - (\Delta x_0)^2 + 2\Delta x_0}{\Delta x_0}, \quad \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} =$$

$$= \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{-2x_0\,\Delta x_0 - (\Delta x_0)^2 + 2\Delta x_0}{\Delta x_0} = -2x_0 + 2$$

$\boxed{f'(x_0) = -4}$

$a_3)\ f(x_0 + \Delta x_0) = (x_0 + \Delta x_0)^3 = x_0^3 + 3x_0^2\,\Delta x_0 + 3x_0(\Delta x_0)^2 + (\Delta x_0)^3 \qquad f(x_0) = x_0^3$

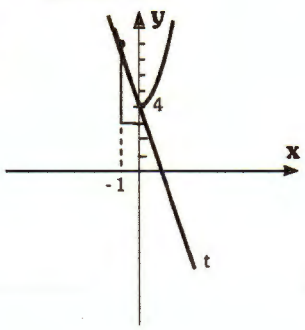
$f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) = \cancel{x_0^3} + 3x_0^2\,\Delta x_0 + 3x_0(\Delta x_0)^2 + (\Delta x_0)^3 - \cancel{x_0^3}$

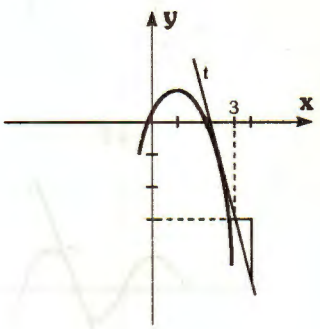
$$\frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \frac{3x_0^2\,\Delta x_0 + 3x_0(\Delta x_0)^2 + (\Delta x_0)^3}{\Delta x_0},$$

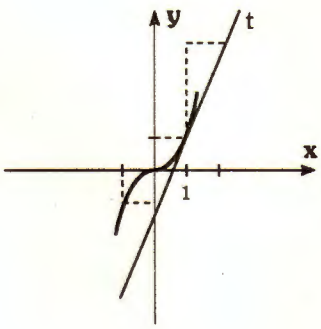
$$\lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} = \lim_{\Delta x_0 \to 0} \frac{3x_0^2\,\Delta x_0 + 3x_0(\Delta x_0)^2 + (\Delta x_0)^3}{\Delta x_0} = 3x_0^2$$

$\boxed{f'(x_0) = 3}$

(b)







Para Aplicar (C)

(a) $a_1)\ f(x) = x \qquad \Delta y = \cancel{x} + \Delta x - \cancel{x} \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 1$ $\boxed{f'(x) = 1}$

$a_2)\ f(x) = x^2 \qquad \Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \cancel{x^2} + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - \cancel{x^2}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x}, \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x, \qquad \boxed{f'(x) = 2x}$$

(b) $b_1)\ f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$b_2)\ f'(x) = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b_3)\ f'(x) = -4x^{-5} = \frac{-4}{x^5}$

$b_4)\ f'(x) = \frac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}} = \frac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

$b_5)\ f'(x) = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

(c) $c_1)\ f(x + \Delta x) - f(x) = \operatorname{sen}(x + \Delta x) - \operatorname{sen} x$ (transformando en producto)

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x}}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}}{\Delta x}$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{2\,\text{sen}\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} : \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x \qquad \boxed{f'(x) = \cos x}$$

$c_2)$ $f(x+\Delta x) - f(x) = \cos(x+\Delta x) - \cos x$ (transformando en producto)

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{-2\,\text{sen}\left(\frac{x+\Delta x+x}{2}\right)\text{sen}\frac{x+\Delta x-x}{2}}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0} \text{sen}\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\text{sen}\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = -\text{sen } x$$

$\boxed{f'(x) = -\text{sen } x}$

Para Aplicar (D)

(a) $a_1)$ $f'(x) = 1(x^4 - 2x) + x(4x^3 - 2) = x^4 - 2x + 4x^4 - 2x = 5x^4 - 4x$

$a_2)$ $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \text{sen } x(-\text{sen } x) = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

$a_3)$ $f'(x) = 1\cos x + x(-\text{sen } x) = \cos x - x\,\text{sen } x$

(b) $b_1)$ $f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1)2x}{x^4} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{x(-x-2)}{x^3}$

$b_2)$ $f'(x) = \frac{\cos^2 x - \text{sen } x(-\text{sen } x)}{(\cos x)^2} = \frac{\cos^2 x + \text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$b_3)$ $f'(x) = \frac{\frac{1\sqrt{x}}{2x}\cdot(x+3) - \sqrt{x}}{(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(x+3-2x)}{2x(x+3)^2} = \frac{\sqrt{x}(3-x)}{2x(x+3)}$

Para Aplicar (E)

(a) $a_1)$ $f'(x) = 5\cos 5x$,

$a_2)$ $f'(x) = 15(3x+2)^4$

$a_3)$ $f'(x) = \frac{1}{\text{sen } x} \cdot \cos x$

$a_4)$ $f'(x) = \frac{\sqrt{2x+3}}{(2x+3)}$

a_5) $f'(x) = -30 \cos^4(3x^2 + 1) \operatorname{sen}(3x^2 + 1)$

(b) b_1) $f'(x) = 9x^2$, $f''(x) = 18x$, $f'''(x) = 18$, $f^{IV}(x) = 0$

b_2) $f'(x) = 4x^3 + 4x$, $f''(x) = 12x^2 + 4$, $f'''(x) = 24x$, $f^{IV}(x) = 24$, $f^{V}(x) = 0$, $\boxed{f^{n}(x) = 0 \text{ si } n \geq 5}$

b_3) $f'(x) = -\operatorname{sen} x$, $f''(x) = -\cos x$, $f'''(x) = \operatorname{sen} x$, $f^{IV}(x) = \cos x$, $f^{V}(x) =$ .....se repite

b_4) $f'(x) = 3(x + 3)^2$, $f'(x) = 6(x + 3)$, $f''(x) = 6$, $f^{IV}(x) = 0$

Para Aplicar (F)

(a) $f'(t) = -3 + 2t$ $\quad f''(t) = 2$

(b) $v = f'(t) = 5 + 20t$ $\quad f'(2) = 5 + 40$ $\quad a = 2\ m/seg^2$ $\quad v = 45\ m/seg$

Para Aplicar (G)

(a) a_1) f es creciente en $(0, +\infty)$; f es decreciente en $(-\infty, 0)$

a_2) f es creciente en $(-\infty, 3)$; f es decreciente en $(3, +\infty)$

a_3) f es creciente en $(-\infty, \infty)$;

a_4) f es decreciente en $(\pi, 3\pi)$ f es creciente en $(0, \pi)$

(b) V, V, F, F, F

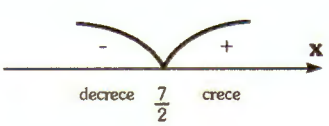
(c) 1) $f'(x) = 2x - 7$

2) $2x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{2}$

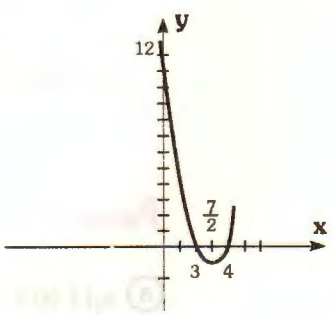
3) $2x - 7 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{7}{2}$

4) Intervalo de crecimiento $\left(\frac{7}{2}, +\infty\right)$ Int. de decrecimiento $\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$

5)



6)



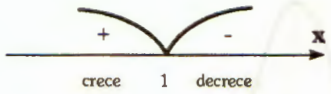
(d) 1) $f'(x) = -2x + 2$

2) $-2x + 2 > 0 \Leftrightarrow x < 1$

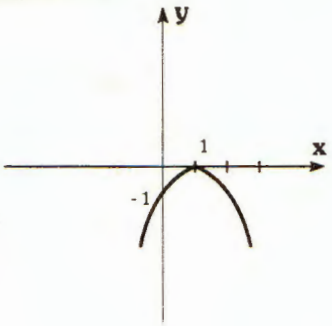
3) $-2x + 2 < 0 \Leftrightarrow x > 1$

4) Int. de crecimiento $(-\infty, 1)$ Int. de decrecimiento $(1, +\infty)$

5)



6)



(e) 1) $f'(x) = \cos x$

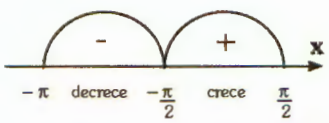
2) Si $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\cos x > 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

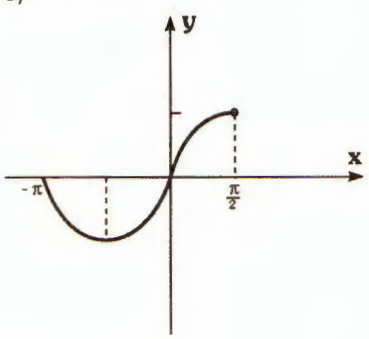
3) Si $x \in \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]$ entonces $\cos x < 0 \Leftrightarrow -\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

4) Intervalo de crecimiento: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

5) Intervalo de decrecimiento $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$

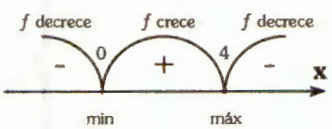
6)





Para Aplicar (H)

(a) 1) $f'(x) = 0$ si $x_1 = 0$ o $x_2 = 4$



2) $\begin{cases} \text{Si } x < 0 \Rightarrow x\left(-\frac{x}{2}+2\right) < 0 \\ x > 0 \text{ y } x < 4 \Rightarrow x\left(-\frac{x}{2}+2\right) > 0 \end{cases}$ mín.en $x = 0$

$\begin{cases} \text{Si } x < 4 \Rightarrow x\left(-\frac{x}{2}+2\right) > 0 \\ x > 4 \Rightarrow x\left(-\frac{x}{2}+2\right) < 0 \end{cases}$ máx.en $x = 4$.

Intervalo de crecimiento = (0, 4)

Int. de decrecimiento = $(-\infty, 0)$

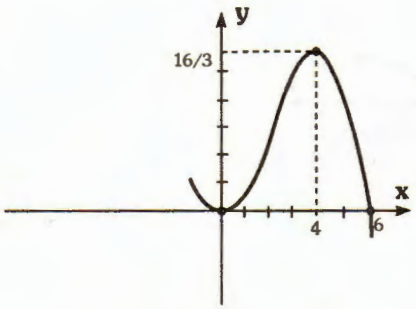
Int. de decrecimiento = $(4, +\infty)$

Punto de la curva donde f alcanza máx $\left(4; \frac{16}{3}\right)$

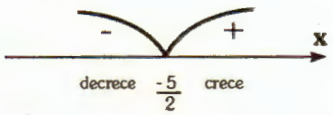
Punto de la curva donde f alcanza mín (0; 0)

3) Buscamos los ceros de la función $x^2(-\frac{x}{6}+1)=0 \rightarrow x_1=0$, $x_2=6$

4)



(b) 1) La derivada se anula en $x=-\frac{5}{2}$

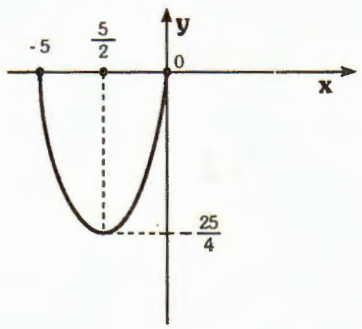


2) $\begin{cases} \text{Si } x < -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x+5<0 \\ \text{Si } x > -\frac{5}{2} \Rightarrow 2x+5>0 \end{cases}$ mín en $x=-\frac{5}{2}$

mín $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{25}{4}\right)$ I c $=\left(-\frac{5}{2}, +\infty\right)$ I d $=\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$

3) $x=0$ $x=5$

4)



(c) 1) La derivada se anula en $x_1=2$ y $x_2=0$

2) $\begin{cases} \text{Si } x<2 \text{ y } x>0 \Rightarrow x(2-x)>0 \\ x>2 \Rightarrow x(2-x)<0 \end{cases}$ máx en $x=2$

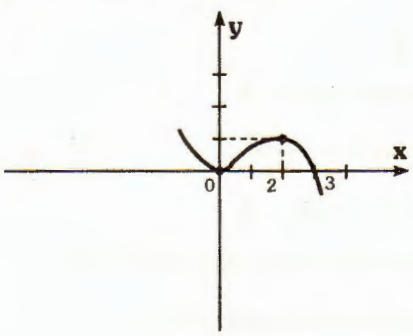
$\begin{cases} \text{Si } x<0 \Rightarrow x(2-x)<0 \\ x>0 \Rightarrow x(2-x)>0 \end{cases}$ mín en $x=0$

máx.$\left(2; \frac{4}{3}\right)$ mín.$(0; 0)$

I c: $(0, 2)$ I d: $(-\infty, 0)$ $(2, +\infty)$

3) $x=0$ $x=3$

4)



Para Aplicar ①

ⓐ 1) $f'(x) = 3x^2 + 2x \quad f''(x) = 6x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$

2) $6x + 2 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{3} \Rightarrow$ f tiene concavidad positiva en $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

$6x + 2 < 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{3} \Rightarrow$ f tiene concavidad negativa $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$

Punto de inflexión $\left(-\frac{1}{3}; +\frac{2}{27}\right)$

ⓑ 1) $f'(x) = 3x^2 - 3$ 2) $6x > 0 \Rightarrow x > 0$ f tiene concavidad positiva en $(0, +\infty)$

$f''(x) = 6x \Rightarrow x = 0$ $\quad 6x < 0 \Rightarrow x < 0$ f tiene concavidad negativa en $(-\infty, 0)$

Punto de inflexión (0;0)

PARA EJERCITAR

1) a) $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$ b) $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ c) $f'(2) = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

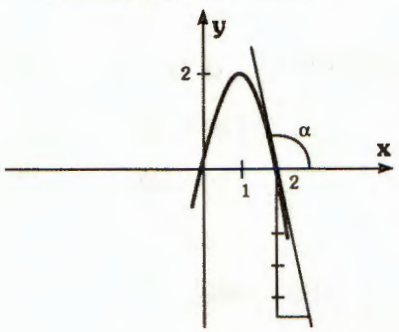
d) $f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ e) $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$ f) $f'(1) = 2(\ln 2 + 1)$

g) $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ h) $f'(-1) = -\frac{5}{3}$

2) a) $f'(1) = 5$ b) $f'(0) = -4$ c) $f'(-1) = 2$

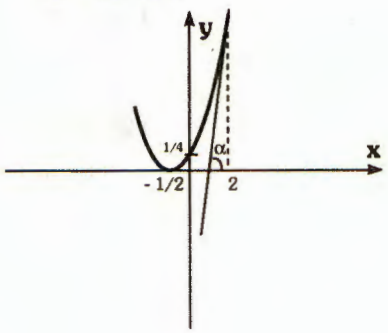
3) a) $f'(2) = -4$ pendiente $-4 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = -4$

inclinación $\alpha = 104°2'10''$

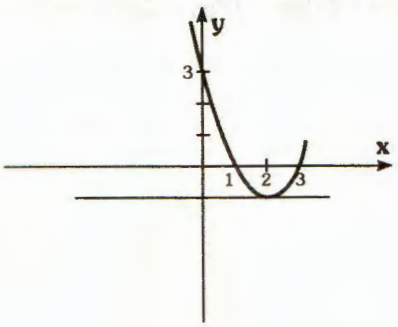


b) $f'(2) = 5$ pendiente $5 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 5$

$\alpha = 78°41'24''$



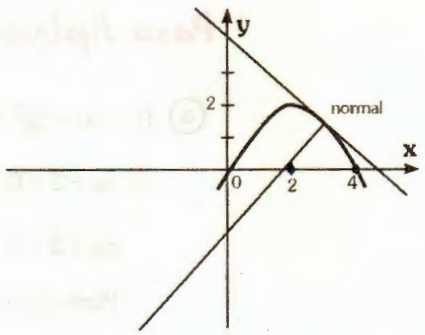
c) $f'(2) = 0$ pendiente $0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0°$



4) $f'(3) = -1$

Recta tg en $\left(3; \frac{3}{2}\right)$

$\boxed{y = -x + \frac{9}{2}}$



Recta normal $y - y_0 = \frac{-1}{f'(3)}(x - x_0)$

$\boxed{y = x - \frac{3}{2}}$

5) $f'(-1) = 3 \quad (x_0, y_0) = (-1; 1) \quad t \rightarrow y = 3x + 4 \quad r \rightarrow y = 3x$

6) $P = \left(5; -\frac{15}{2}\right)$

7) $y = -x + 2$

8) a) $\sqrt{x}\left(\frac{\cos x}{2x} - \operatorname{sen} x\right)$ b) $e^x \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{3x}\right)$ c) $(2x+1)\log x + (x+1)\log e$

d) $2^x\left(\ln x \,.\, \ln 2 + \frac{1}{x}\right)$

e) $\frac{\sqrt{x}\,(2x\cos x - \operatorname{sen} x)}{2x^2}$ f) $\frac{x\sqrt{x} - \sqrt{x} - 2x}{2x\,(x-1)^2}$

g) $-\frac{\cos x + (x+1)\operatorname{sen} x}{(x+1)^2}$

9) $\left(1; \frac{1}{3}\right) \left(-5; -\frac{1}{3}\right)$

10) $(0; 0) \qquad \left(+\sqrt{3}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(-\sqrt{3}; +\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

11) a) $20x(2x^2 - 1)^4$

b) $24 \operatorname{sen}^2(8x+1)\cos(8x+1)$ c) $4x\, e^{2x^2+1}$ d) $-\frac{1}{x}\operatorname{sen}(\ln x)$ e) $3^{\ln 2x}\,\frac{\ln 3}{x}$

12) a) $f'(x) = 5x^4 + 4 \qquad f''(x) = 20x^3 \qquad f'''(x) = 60x^2$

$f^{IV}(x) = 120x \qquad f^{V}(x) = 120$

b) $f'(x) = 12x^2(2x^3 - 1) \qquad f''(x) = 24x\,(2x^3 - 1) + 72x^4$

$f'''(x) = 24(2x^3 - 1) + 144x^3 + 288x^3,$

$f^{IV}(x) = 24 \,.\, 6x^2 + 432x^2 + 864x^2$

$f^{V}(x) = 288x + 864x + 1728x \qquad f^{VI}(x) = 288 + 864 + 1728, \; f^{VII}(x) = 0$

c) $f'(x) = e^x + xe^x \qquad f''(x) = e^x + e^x + xe^x$

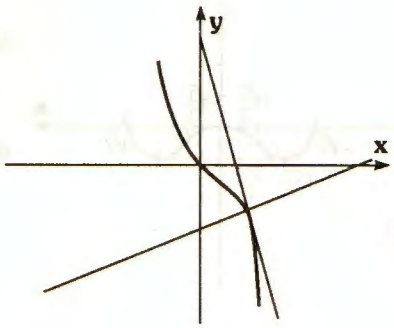
$f'''(x) = 3e^x + xe^x \qquad f^{IV}(x) = 4e^x + xe^x$ .....

13) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 4$

14) $x_0 = \frac{\sqrt{6}}{3} \qquad x_1 = -\frac{\sqrt{6}}{3}$

15) $x_0 = \frac{1}{2} \qquad x_1 = -\frac{1}{2}$

16) $A = \frac{5}{3}$



17) x= 1 x= –1

18) v = 60 m/seg $f(t) = 30\,t + \frac{1}{2}at^2$

$f'(t) = 30 + at$, $f'(3) = 60$

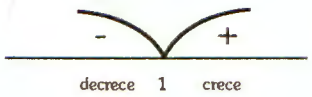
19) $f(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ $f'(t) = v_0 - gt$

$f'(2) = 40 - 20$ v = 20 m/seg

20) $a = 6\ m/seg^2$

21) a) Id (– ∞, I)

Ic: (1, +∞)



Punto mín. (1; - 2)

b) Id: (– ∞, -1)

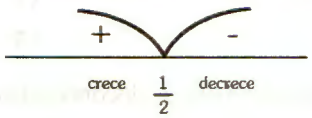
Ic: (–1 , 1)

Punto mín. (–1;-4)

Punto máx. (+1, 4)

c) Ic: $(-\infty, \frac{1}{2})$

Id: $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$



Punto máx. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

22) Ic +: (0,+ ∞)

Ic-: (– ∞, 0)

Punto de inflexión (0; 2)

b) Ic -: (-∞, ∞)

No tiene punto de inflexión

c) Ic +: $(-\infty, \frac{4}{3})$

Ic -: $(\frac{4}{3}, +\infty)$

Punto de inflexión $\left(\frac{4}{3}; \frac{128}{27}\right)$

23) a) Punto mín $\left(3; -\frac{27}{4}\right)$

Puntos de inflexión (0; 0) (2; -4)

b) Punto mín (π;-1)

Punto máx. (0;1)

Punto de inflexión $\left(\frac{\pi}{2};0\right)$

c) Punto máx (0; 1)

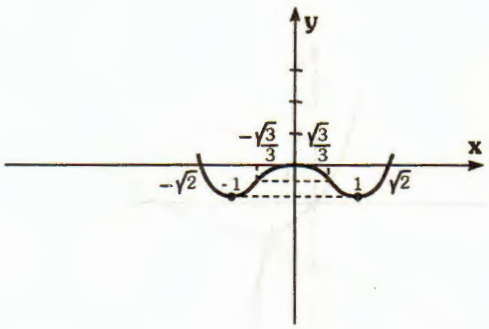
Puntos de inflexión $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{3}{4}\right)$

24) a) Ic: (-1, 0), (1, +∞)

Id: (– ∞, -1), (0, 1)

c) Punto máx.(0;0)

Puntos mín. $\left(1; -\frac{1}{2}\right)\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$



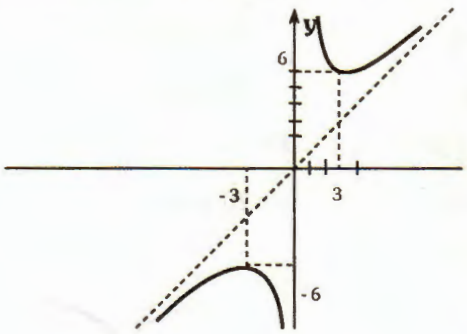
b) Ic + $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ $\left(+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

Ic-: $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; +\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d) Puntos de inflexión $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{18}\right)$

$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{18}\right)$

25) Dom f = R - {0} Ic (-∞, -3), (3, +∞)



Id (-3,0), (0,3)

Punto mín (3; 6) Punto máx (-3; -6)

No tiene puntos de inflexión

Asíntota x = 0 y = x

La asíntota x = 0 determina el cambio de concavidad

Ic +: (0, +∞) Ic-: (- ∞, 0)

26) Punto de inflexión $\left(1; -\frac{2}{3}\right)$

recta tg $y = -x + \frac{1}{3}$

27) Puntos de inflexión $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$

$(\pi; 0)$

mín. en $x_0 = 0$ $x_1 = 3\frac{\pi}{4}$ $x_2 = 3\frac{\pi}{2}$

máx. en $x_3 = \frac{\pi}{4}$ $x_4 = 5\frac{\pi}{4}$

28) a) Punto de discontinuidad x = -2

Dom f = R- {0} Asíntota x= -2 · y = 3

b) Punto mín $\left(4; -\frac{32}{3}\right)$

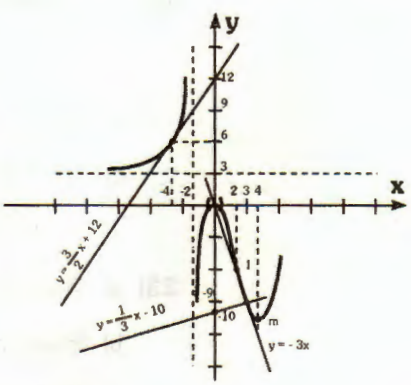
c) Punto de inflexión $\left(2; -\frac{16}{3}\right)$

d) y = - 3x

e) $y = \frac{1}{3}x - 10$

f) (-4,6)

$y = \frac{3}{2}x + 12$



29) 1

30) 10 dam

31) $8\frac{\sqrt{3}}{3}$

32) h = 1 $r = \sqrt{\frac{10}{\pi}}$

GUIA DE ESTUDIO VIII

Para Aplicar (A)

1. $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$ porque $\left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = x^3$

2. $\int dx = x + C$ porque $(x + C)' = 1$

3. $\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$ porque $(-\cos x + C)' = \operatorname{sen} x$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$ porque $(e^x + C)' = e^x$

5. $\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C$ porque $\left(2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{3} + C\right)' = x^{\frac{1}{2}}$

6. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ porque $(\ln x + C)' = \frac{1}{x}$

7. $\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$ porque $(-\operatorname{cotg} x + C)' = \operatorname{cosec}^2 x$

8. $\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$ porque $(\operatorname{tg} x + C)' = \sec^2 x$

Para Aplicar (B)

1. $\int (x^2 + 3x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + C$

2. $\int (2x^2 - \operatorname{sen} x)\,dx = 2\frac{x^3}{3} + \cos x + C$

3. $\int (1 + \cos x)dx = x + \operatorname{sen} x + C$

4 $\int \left(\frac{3x^5}{2} + \frac{5}{x}\right)\,dx = \frac{1}{4}x^6 + 5\ln x + C$

5. $\int (2e^x + 4x^2 - 3)dx = 2e^x + \frac{4}{3}x^3 - 3x + C$

6. $\int (\sqrt{x} + 5\cos x)\,dx = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + 5\operatorname{sen} x + C$

7. $\int (\sec^2 x + \operatorname{sen} x)\,dx = \operatorname{tg} x - \cos x + C$

8. $\int (3\operatorname{cosec}^2 x + 5^x)\,dx = -3\operatorname{cotg} x + \frac{5^x}{\ln 5} + C$

Para Aplicar (C)

1. $\int \operatorname{sen} 5x\,dx =$ $5x = u$ $dx = \frac{du}{5}$

$\int \operatorname{sen} u \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \operatorname{sen} u\,du = \frac{1}{5}(-\cos u) + C$

luego $\int \operatorname{sen} 5x\,dx = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$

2 $\int \frac{2dx}{x-1} = 2\ln(x-1) + C$

3. $\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2e^{\frac{1}{2}x} + C$

4. $\int (1-5x)^{22}\,dx = -\frac{1}{5}\frac{(1-5x)^{23}}{23} + C = \frac{-1}{115}(1-5x)^{23} + C$

5 $\int \cos(2x - 4)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2x - 4) + C$

6. $\int 2x\sqrt{x^2 + 2}\,dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x^2 + 2)^3} + C$

Para Aplicar (D)

1) $\int x \ln x\, dx = x^2 \frac{\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int x\, dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

2) $\int x \sec^2 x\, dx = x \operatorname{tg} x + \ln(\cos x) + C$

3) $\int e^x (x^2 + 2x)\, dx = x^2 e^x + C$

4) $\int \sqrt[3]{x} \ln x\, dx = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\ln x - \frac{9}{16}x\sqrt[3]{x} + C = \frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}\left(\ln x - \frac{3}{4}\right) + C$

5) $\int x\sqrt{1-x}\, dx = -\frac{2}{3}\left[x(1-x)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(1-x)^{\frac{5}{2}}\right] + C$

6) $\int e^x \cos x\, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx + C \Rightarrow \int e^x \cos x\, dx =$

$= e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx + C \Rightarrow 2\int e^x \cos x\, dx =$

$= e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C \Rightarrow \int e^x \cos x\, dx = \frac{1}{2}e^x(\operatorname{sen} x + \cos x) + C$

Para Aplicar (E)

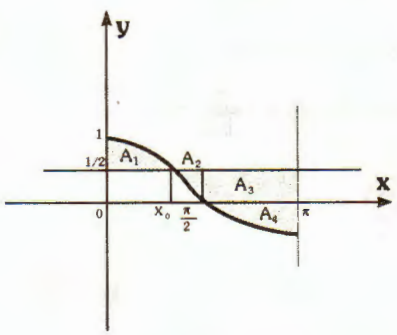
1) -18 2) $\frac{9}{2}$ 3) 1 4) $-\frac{1}{6}$ 5) $\frac{6}{5}$ 6) 1

Para Aplicar (F)

a) $\frac{4}{3}$ b) 2 c_1) $\frac{9}{2}$ c_2) 3

Para Aplicar (G)

(a)



1) $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = \frac{\pi}{3}$

2) (gráfico)

3) $A_1 = \int_0^{\pi/3} \cos dx - \int_0^{\pi/3} \frac{1}{2}\, dx = \operatorname{sen} x \Big|_0^{\pi/3} - \frac{1}{2}x\Big|_0^{\pi/3}$

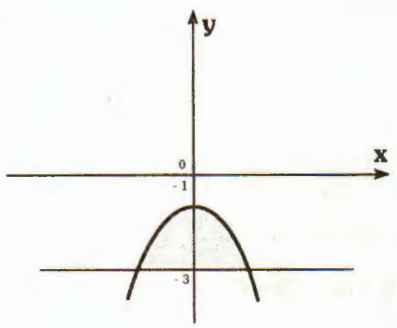
$\Rightarrow A_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}$

$A_2 = \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{2}\, dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x\, dx = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

$A_3 = \frac{\pi}{4}$ $A_4 = 1$

$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\pi}{6}}$

(b)



1) $-x^2 - 1 = -3 \Rightarrow$

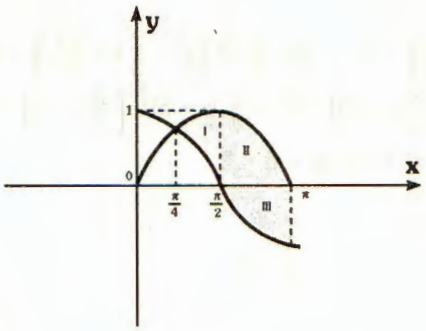
$x_1 = \sqrt{2}$ $x_2 = -\sqrt{2}$

2) (gráfico)

3) $A = -\left[\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-3\, dx) - \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (-x^2 - 1)\, dx\right] =$

$\boxed{\frac{8}{3}\sqrt{2}}$

Ⓒ



1) $\operatorname{sen} x = \cos x \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

2) (gráfico)

3) $A = A_I + A_{II} + A_{III}$

$A_I = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x\,dx = \sqrt{2} - 1$

$A_{II} = \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx = 1$

$A_{III} = -\int_{\pi/2}^{\pi} \cos x\,dx = 1$

$A = \sqrt{2} - 1 + 1 + 1$ $\qquad \boxed{A = \sqrt{2} + 1}$

PARA EJERCITAR

1) a) $\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} + C$ b) $-x^{-3} - x^{-1} + C$ c) $-\frac{1}{x^2} - 2\ln x + \operatorname{tg} x + C$

d) $\frac{2}{3}x\sqrt{3x} + C$ e) $6\sqrt{x} + \frac{x^2}{2} + C$ f) $3\sqrt[3]{x} + \ln x + C$

g) $\frac{3x^3 + 2x^2 + 4}{2x} + C$ h) $2\sqrt{x} - e^x + C$ i) $\frac{10}{7}\sqrt[10]{x^7} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

j) $-\ln(\cos x) + x + C$ k) $\operatorname{tg} x - \operatorname{cotg} x + C$ l) $x - \cos x + C$

m) $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C$ n) $6\sqrt{x} + 2\sqrt{3}x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

2) a) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{5}{3}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{2} + x + \frac{3}{2}$

c) $f(x) = -x^3 + \frac{x^2}{2} + 2$ d) $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt{2}$

3) $f(2) = \frac{6}{\ln^2 3} + 5$

4) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3} - 2}{4}$

5) $-\frac{x^3}{12} - \frac{3}{4}x + \frac{11}{6}$

6) a) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}(3x) + C$ b) $\frac{\cos^{-2}x}{2} + C$ c) $2\operatorname{sen}\sqrt{x} + C$

d) $\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x + C$ e) $\frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} + C$ f) $2e^{x^2} + C$

g) $\frac{1}{7}(1+x)^7 - \frac{(1+x)^6}{6} + C$ h) $-3\ln\left(\cos\left(\frac{1}{3}x\right)\right) + C$ i) $16\ln(x+3) - 5(x+3) + C$

7) a) $\frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + C$ b) $\frac{3^x}{\ln 3}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\right) + C$ c) $\cos x\,(2 - x^2) + 2x\operatorname{sen} x + C$

d) $\int \operatorname{sen}^2 x\,dx =$ $\quad u = \operatorname{sen} x$ $\quad u' = \cos x$

$v' = \operatorname{sen} x$ $\quad v = -\cos x$

$\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \underbrace{\int \cos^2 x\,dx}_{*}$.

* $\int \cos^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + \int dx - \int \operatorname{sen}^2 x\,dx$ reemplazando

$2\int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\operatorname{sen} x \cos x + x \Rightarrow \int \operatorname{sen}^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} x \cos x + \frac{x}{2} + C$

e) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}\left(\ln x - \frac{2}{3}\right) + C$ f) $\frac{1}{3}e^{3x}\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{11}{9}\right) + C$

g) $\frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}\left[x - \frac{2}{5}(x+5)\right] + C = \frac{2}{3}(x+5)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{3}{5}x - 2\right] + C$

h) $-e^{-x}(x-5) - e^{-x} + C = -e^{-x}(x-4) + C$ i) $\frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$

8) a) -2 b) 8 c) $\frac{5}{24}$

d) 1 e) $-\frac{5}{4}$ f) $e - 1$

9) $A = 12$

10) a) $A = \frac{16}{3}$ b) $A = \frac{26}{3}$ c) $A = \frac{15}{2\ln 2}$

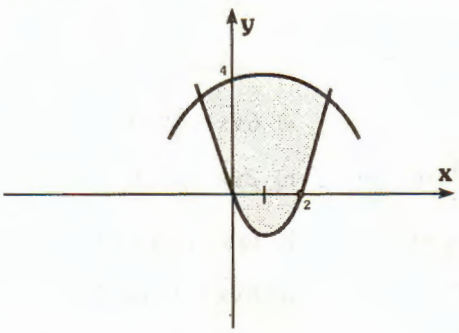
11) a) $A = \frac{16}{3}$ b) $A = \frac{9}{4}\sqrt{3}$ c) $A = \frac{28}{3}$

12) a) $A = 9$ b) $A = \frac{34}{5}$ c) $A = 5$

13) a) $A = \frac{16}{3}$ b) $A = \frac{2 - \ln 2}{\ln 2}$ c) $A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

14) a) $A = 1$ b) $A = 2$ c) $A = \sqrt{2}$

15)



$A = \frac{128}{2}$

16) Recordar: $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{x}{2}$

$A = \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\frac{x}{2}\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos x\,dx = 3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

17) $A = \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} 2x\,dx - \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen} x\,dx + \int_{\pi/3}^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx - \int_{\pi/3}^{\pi/2} \operatorname{sen} 2x\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen} 2x\,dx$

$A = \frac{11}{4}$

18) $A = 5\ln 3$

19) $A = \frac{5}{12} - \ln\frac{3}{2}$

20) $A = \frac{9}{2}$

21) $A = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 x^3\,dx \Rightarrow \quad A = \frac{1}{4}$

22) $A = 4$

INTEGRACIÓN I

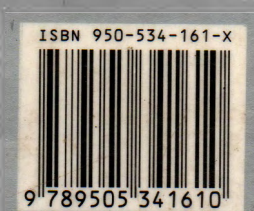
1.d	11.e	21.b	31.b	41.a	51.c
2.a	12.b	22.b	32.d	42.c	52.c
3.b	13.d	23.d	33.b	43.d	53.a
4.b	14.d	24.a	34.d	44.b	54.a
5.e	15.e	25.e	35.a	45.c	55.c
6.c	16.a	26.b	36.b	46.c	56.b
7.d	17.b	27.b	37.c	47.a	57.c
8.b	18.c	28.d	38.b	48.c	58.c
9.e	19.b	29.d	39.c	49.a	59.a
10.d	20.c	30.c	40.b	50.a	60.d

INTEGRACIÓN II

1.c	9.d	17.d	25.a	33.b
2.e	10.c	18.d	26.d	34.c
3.d	11.a	19.e	27.c	35.d
4.d	12.d	20.e	28.b	36.a
5.c	13.d	21.d	29.d	37.a
6.d	14.d	22.b	30.e	38.a
7.b	15.c	23.b	31.d	39.e
8.a	16.c	24.b	32.b	40.b

AZ EDITORA ha dado término a la impresión de esta obra,
en Nuevo Offset, Viel 1444 - Capital Federal,
en el mes de marzo de 1992.

12-021



I.S.B.N. 950-534-161-X